

10—11 класс

Второй этап

Второй день

Дата написания	7 марта 2015 г.
Количество заданий	5
Сумма баллов	100
Время написания	3 часа

Не пытайтесь читать задания до объявления начала написания тура.

**Все задачи требуют записи подробного решения.
Все действия в решении должны быть обоснованы.
Ответ без обоснования, как правило, не оценивается, даже если он правильный.**

Решения заданий выполняются на отдельном бланке.

Задача 1. Всё по P рублей!**(20 баллов)**

21 февраля вы решали задачу «99 цен», в которой получалось, что магазин поставит на товар с номером i цену $p_i = 1000/i$ рублей. Напомним условие:

В магазине продаются 99 разных товаров. Магазин закупает товар i ($i = 1, 2, \dots, 99$) по цене $500/i$ рублей. Если магазин назначит цену p на товар i , покупатели купят i/p^2 единиц этого товара. Магазин стремится получить максимальную прибыль (разницу между своими доходами и своими расходами на закупку) от перепродажи товаров. Допустим, магазин может назначать на товары любые цены. Какую цену он назначит на товар с номером i ?

Сегодня вам предлагается проанализировать в рамках того же условия несколько новых ценовых политик. Мы будем говорить, что какая-то ценовая политика *выгодна*, если она не уменьшает общую прибыль магазина по сравнению со случаем, который был рассмотрен вами 21 февраля.

Находясь на отдыхе за границей, владелец магазина увидел там необычные супермаркеты, в которых все товары продавались по одной и той же цене, и решил сделать у себя то же самое, не меняя ассортимент продаваемых товаров. Владелец рассчитывает, что необычная ценовая политика привлечет новых покупателей, в результате чего при цене p в магазине купят не i/p^2 единиц, а $K \cdot i/p^2$ единиц товара i , где $K \geq 1$.

а) Допустим, $K = 1$. Докажите, что «политика одной цены» не будет выгодна магазину.

б) Обозначим за K^* минимальное значение K , при котором «политика одной цены» выгодна владельцу магазина. Для каждого $K \geq K^*$ найдите цену P , которую он назначит на все товары. Будут ли среди продаваемых товаров такие, цена на которые для потребителей будет ниже, чем цена закупки для магазина? Если да, укажите их номера.

в) Рассмотрим теперь «политику двух цен», то есть политику, при которой на каждый из товаров назначена либо цена P_1 , либо цена P_2 . Пусть спрос на каждый товар такой же, как при политике одной цены. Обозначим за K^{**} минимальное значение K , при котором «политика двух цен» выгодна владельцу магазина. Основываясь на экономической интуиции и не проводя расчетов, сравните K^* и K^{**} .

Задача 2. Фирма, самолет, менеджер**(20 баллов)**

Компания «Elrra» собирается нанять топ-менеджера. В собственности фирмы есть небольшой частный самолет, который предназначен для передвижения менеджера по служебным надобностям. Менеджер, однако, может злоупотреблять служебным положением и использовать самолет в личных целях, что создает для компании дополнительные затраты.

Если менеджер не согласится работать в фирме «Elrra», ее прибыль будет равна нулю. Если менеджер согласится на работу и не будет пользоваться самолетом компании в личных целях, то ее прибыль (до выплаты зарплаты менеджера) составит 800, если будет — всего лишь 162. Владельцы фирмы не могут наблюдать действия менеджера и не знают, как прибыль зависит от использования самолета, поэтому не могут запретить менеджеру использовать самолет в личных целях. Менеджер, в отличие от владельцев фирмы, знает, как прибыль фирмы зависит от использования самолета.

Пусть $w \geq 0$ — зарплата менеджера, а j — переменная, равная 1, если менеджер использует самолет в личных целях, и 0 в противном случае. Менеджер выбирает свои действия так, чтобы значение величины $U = 0,1\sqrt{w} + j$ было наибольшим. Обладая редким талантом, менеджер всегда может уйти работать в конкурирующую компанию «Gnusmas». Условия работы у конкурентов соответствуют $U = 2$. Считайте, что менеджер благожелателен к фирме «Elrra»: если ему безразлично, на какой фирме работать, то он соглашается на работу в «Elrra»; если ему безразлично, использовать самолет или нет, то он не использует самолет.

а) Допустим, зарплата менеджера не зависит от прибыли фирмы (и при этом такова, что менеджеру выгодно согласиться работать в фирме). Будет ли он использовать самолет в личных целях?

б) Допустим, зарплата менеджера равна некой доле α от прибыли фирмы ($0 < \alpha < 1$). При каком минимальном значении α менеджер согласится работать в фирме и не будет использовать самолет в личных целях? Что выгоднее для фирмы — предлагать менеджеру фиксированную зарплату (как в пункте **а**)) или найденную вами в этом пункте долю α от прибыли?

в) Допустим, согласно контракту, зарплата менеджера равна w_1 , если прибыль фирмы равна 800, и w_2 , если прибыль фирмы равна 162. Существуют ли произвольные значения w_1 и w_2 такие, что контракт (w_1, w_2) более выгоден для фирмы, чем контракт, согласно которому менеджеру выплачивается доля от прибыли фирмы, найденная вами в **б**)?

Задача 3. Магазины в Кукумбрии

(20 баллов)

Страна Кукумбрия имеет форму прямой дороги длиной 100 километров. В стране есть 101 житель, каждый из них живет в отдельном доме. Все дома расположены на одной стороне дороги, расстояние между любыми соседними домами равно 1 км (считайте, что сами дома не имеют ширины). Другая сторона дороги предназначена для магазинов, в которых продается единственный товар — огурцы. В зависимости от ситуации, количество магазинов может оказаться разным, единственное ограничение — два магазина не могут располагаться ближе, чем на расстоянии 1 км друг от друга. Например, если в стране будет 4 магазина на расстоянии 14, 32, 71 и 94 км от начала дороги, то ситуация будет выглядеть следующим образом:



Каждый житель Кукумбрии каждый день отправляется в ближайший к нему магазин и покупает там ровно один огурец по установленной государством цене 18 тугриков. Если ближайших к нему магазинов два (он живет посередине между ними), то он ходит в них поочередно, поэтому можно считать, что каждый из этих магазинов зарабатывает на нем в среднем 9 тугриков в день.

Фирма «Пупырышек» рассматривает возможность открыть в Кукумбрии магазин или сеть магазинов. Издержки на содержание одного магазина составят 100 тугриков в день независимо от того, сколько огурцов там будет продано, других издержек у фирмы нет (сами огурцы имеются у нее в неограниченном количестве бесплатно).

Фирма «Пупырышек» сама выбирает, сколько и где магазинов открыть, максимизируя суммарную прибыль всех своих магазинов. Опишите, как будет выглядеть сеть магазинов «Пупырышек» (сколько будет магазинов и где они будут располагаться) в каждом из следующих случаев.

- а) Других магазинов в стране нет, то есть до прихода «Пупырышка» ситуация выглядела так:



- б) В стране уже работает фирма «Зернышко», единственный магазин которой расположен в середине дороги:



- в) Шесть магазинов сети «Зернышко» расположены через 20 км друг от друга:



- г) Одиннадцать магазинов сети «Зернышко» расположены через 10 км друг от друга:



Задача 4. Дилемма центробанка

(20 баллов)

Во Фруктовой стране спросом среди потребителей пользуются только два товара — дурианы и фейхоа. Дурианы производятся на территории Фруктовой страны, их цена для потребителей равна P_d рублей. Фейхоа импортируются из соседней страны, где их цена составляет 1 доллар. Обменный курс валюты Фруктовой страны равен k рублей за доллар, так что цену фейхоа в рублях для отечественных потребителей (P_f) можно посчитать как $P_f = 1 \cdot k$.

Потребители дурианов готовы платить за единицу этого фрукта v рублей, тогда как производство его единицы стоит c рублей, причем $v > c$. В соответствии с традицией, потребители и производители дурианов поровну делят выгоду от торговли, так что $P_d = (v + c)/2$.

Назовем *уровнем цен* (P) среднюю цену на товары, потребляемые в стране: $P = (P_d + P_f)/2$. Центробанк Фруктовой страны преследует цель минимизации уровня цен в следующем году. Для простоты предположим, что единственный инструмент, которым может управлять центробанк, — значение процентной ставки, по которой он выдает кредиты коммерческим банкам. Обозначим эту ставку за r (в долях), то есть будем считать, что центральный банк выдает кредиты коммерческим по ставке $100r$ % годовых.

Каждая из трех переменных v , c и k зависит от r : $v = 14 - 3r$; $c = 2 + 50r^2$; $k = 10 - 5r$.

- Объясните, почему v убывает с ростом r .
- Объясните, почему c возрастает с ростом r .
- Объясните, почему k убывает с ростом r .
- Предположим, что в настоящий момент $r = 0,15$ (15 %). Следует ли Центробанку снижать ставку, повышать ее или оставить неизменной, чтобы достичь своей цели?

Задача 5. Перераспределение доходов спортивных клубов

(20 баллов)

Согласно правилам многих спортивных лиг, каждая команда должна перечислять определенную долю своих доходов на специальный счет, средства с которого затем распределяются поровну между всеми командами. Эта мера призвана уменьшать неравенство доходов между командами, что, как предполагается, должно приводить к выравниванию команд по силе и тем самым делать матчи более интересными.

В этой задаче вам предлагается проанализировать последствия введения такой меры в рамках следующей простой модели. Представим себе лигу, состоящую из двух команд — А и В. Выручка каждой команды возрастает при росте вероятности ее победы в матче против другой команды (ничьих в этой лиге не бывает). Эта вероятность для каждой команды, в свою очередь, возрастает при увеличении таланта ее игроков и убывает при увеличении таланта игроков соперника. Издержки команды тем больше, чем более талантливых игроков она нанимает. Команда выбирает уровень таланта своих игроков таким образом, чтобы ее прибыль была наибольшей.

Команда А более популярна, чем команда В, вследствие чего при каждом значении вероятности победы над соперником выручка команды А больше, чем выручка команды В.

При ответе на вопросы использование формул не требуется, но и не запрещается.

- Как введение перераспределения доходов между командами повлияет на уровень таланта игроков, нанимаемых командой А? Командой В?
- Может ли введение перераспределения доходов между командами привести к тому, что разница в силе команд не уменьшится, как обычно предполагается, а наоборот, увеличится (что делает матчи более скучными)?
- Может ли введение перераспределения доходов между командами привести к тому, что суммарная прибыль команд увеличится?