Всероссийская олимпиада
школьников по экономике

Заключительный этап

Москва, 10–16 апреля 2022 г.

10 класс

Решения

Задача 1. *Блиц (9–10 класс)* *(12 баллов)*

В первом задании олимпиады вам предлагается коротко ответить на несколько не связанных друг с другом вопросов.

а) *(4 балла)* Горячо обсуждается вопрос о том, есть ли на рынке бензина страны X сговор производителей. Известно, что спрос на бензин в стране описывается уравнением $Q = 100 - P$, а текущая цена составляет $P = 35$. Функции общих издержек производителей бензина являются возрастающими. Может ли в стране X иметь место сговор производителей бензина? (Считайте, что при сговоре фирмы ведут себя как монополист.)

б) *(4 балла)* В отличие от соотечественников, некий гражданин страны Y потребляет только товары, произведенные в стране Y, причем только те из них, в производстве которых не используются иностранные компоненты, труд и капитал. Этот гражданин не участвует в финансовых рынках других стран. Поэтому этот гражданин заявляет, что удешевление национальной валюты страны Y ему не страшно, не приведет к удорожанию его потребительской корзины и вообще не повлияет на его благосостояние. Объясните, почему это может быть не так.

в) *(4 балла)* В стране A КПВ описывается уравнением $y = 40 - x$, а в стране B является ломаной линией, соединяющей точки (0; 40), (15; 30), (30; 15), (40; 0). В обеих странах товары икс и игрек потребляются только пропорции $a : 1$. В отсутствие торговли страны максимизируют потребление товаров. При каких значениях параметра $a > 0$ взаимовыгодная торговля между странами невозможна?

Решение

а) Заметим, что в точке $P = 35$ спрос неэластичен: $E = -\frac{35}{65}$. Но если бы на рынке был сговор, в котором фирмы вели бы себя как монополист, цена бы находилась на эластичном участке спроса, так как монополист с возрастающими общими издержками (положительными MC) всегда выбирает точку на эластичном участке спроса. Значит, сговора быть не может.

Можно привести тот же аргумент и не упоминая эластичность спроса как таковую. Поскольку функция выручки монополиста $TR(Q) = Q(100 - Q)$ убывает при $Q > 50$, функция прибыли $TR(Q) - TC(Q)$ также убывает (раз $TC(Q)$ возрастают), значит $Q = 65$ не может быть оптимальным выпуском (немного снизив выпуск, фирма увеличит прибыль). Следовательно, фирмы не ведут себя как монополист.

Примечание: исследования показывают, что спрос на бензин в реальной жизни как раз неэластичен (при наблюдаемых ценах): большинство оценок эластичности спроса находятся в интервале $[-0{,}5; -0{,}1]$. Это заставляет скептически относиться к разговорам о существовании полного сговора производителей бензина, в котором они вели бы себя как монополист. Тем не менее, возможность сговора, при котором цена ниже монопольной, остается.

б) Объяснение 1 (через спрос): При удешевлении национальной валюты иностранные товары подорожают. Соотечественники гражданина, потребляющие импортные товары, переключатся на отечественные товары, и цены отечественные товары также вырастут, что снизит уровень благосостояния данного гражданина.

Объяснение 2 (через предложение): При удешевлении национальной валюты отечественные компании будут больше экспортировать, что снизит предложение внутри страны и повысит цены на отечественные товары, что снизит уровень благосостояния данного гражданина.

в) Если альтернативные издержки в двух странах в отсутствие торговли не равны, взаимовыгодная торговля возможна: нужно увеличить производство товара икс в стране с меньшими альтернативными издержками и уменьшить его производство в стране с большими альтернативными издержками. Это увеличит суммарное производство товара игрек при том же производстве товара икс. Так мы попадем в точку на суммарной КПВ. Затем можно сдвинуться по суммарной КПВ вправо, пока мы не придем в точку, где производство обоих товаров больше, чем в первоначальной точке. Прирост производства обоих товаров можно распределить между странами, и обеим странам станет лучше.

Если же альтернативные издержки в отсутствие торговли равны, мы уже находимся в точке на суммарной КПВ стран. (Здесь важно, что альтернативные издержки в каждой из стран не являются убывающими.) Поэтому прирост производства обоих товаров невозможен, а вместе с ним невозможна и взаимовыгодная торговля.

Рассчитаем, при каком a альтернативные издержки в двух странах в отсутствие торговли равны. В стране А альтернативные издержки постоянны и равны 1. В стране В КПВ состоит из трех участков, альтернативные издержки на которых равны 2/3, 1, 3/2. Значит, альтернативные издержки равны, если в отсутствие торговли страна В производит на среднем участке КПВ, уравнение которого $y = 45 - x$. Страна В тогда должна потреблять товары в пропорции $a : 1 = x/y = x/(45 - x)$, что при $x \in [15; 30]$ принимает значения от 1/2 до 2.

Ответ: при $a = [1/2; 2]$.

Примечание: границы включаются, так как несмотря на то, что в точках излома альтернативные издержки не определены, легко видеть, что если страна В изначально производит в точке излома, любое перераспределение производства икс между странами снизит суммарное производства товара игрек.

Схема проверки

а) Любое корректное обоснование отсутствия сговора (через оценку эластичности спроса или индекса Лернера; указание на действие монополиста на эластичном участке кривой спроса; указание на убывание выручки в окрестности $Q = 65$; сопоставление предельного дохода и предельных издержек) — **4 балла**.

б)
- Любое корректное обоснование влияния удешевления национальной валюты на гражданина со всеми необходимыми логическими переходами (со стороны спроса: через рост спроса на товары-заменители иностранных товаров/товаров с иностранными компонентами/трудом/капиталом; через предложение: увеличение экспорта, соответственно, снижение предложения экспортируемых потребительских товаров на внутреннем рынке) — **4 балла**.
- Пропуск одного логического перехода во в целом правильной цепочке - минус — **1 балл**.

в)

- обоснование идеи о невозможности взаимовыгодной торговли при равенстве альтернативных издержек товаров в странах А и В — **2 балла**.
- корректный расчет /обоснование значений/значения параметра a — **2 балла**.
- В любом пункте арифметическая ошибка — минус 1 балл за пункт

Задача 2. *Ассорти неэффективностей* *(12 баллов)*

В учебниках экономики, как правило, перечисляется несколько видов «провалов рынка»: недостаток конкуренции, внешние эффекты (экстерналии), недостаток общественных благ, информационная асимметрия. То, как каждая из этих причин приводит к неэффективности, можно объяснить по-разному (и зачастую это даже делается в разных главах учебника), но в этой задаче мы обсудим, как эти явления связаны между собой. В пунктах задачи приведены мнения вымышленных экономистов. Согласны ли вы с ними? Объясните вашу точку зрения, опираясь на стандартные экономические модели и приводя графические иллюстрации там, где они помогают лучше понять ваш аргумент.

а) *(3 балла)* Экономист А. считает, что проблема недостатка общественных благ имеет те же корни, что и неэффективность, вызванная экстерналиями.

б) *(3 балла)* Экономист Б. считает, что если бы не было информационной асимметрии, то потерь благосостояния, вызванных монополизиацией рынка, можно было бы избежать.

в) *(3 балла)* Экономист В. считает, что монополия в стандартной модели не производит общественно оптимальный объем выпуска, потому что имеет место своего рода внешний эффект.

г) *(3 балла)* Экономист Г. считает, что фирмы на олигополистическом рынке могут недополучать максимально возможную прибыль, потому что накладывают внешние издержки друг на друга.

Решение

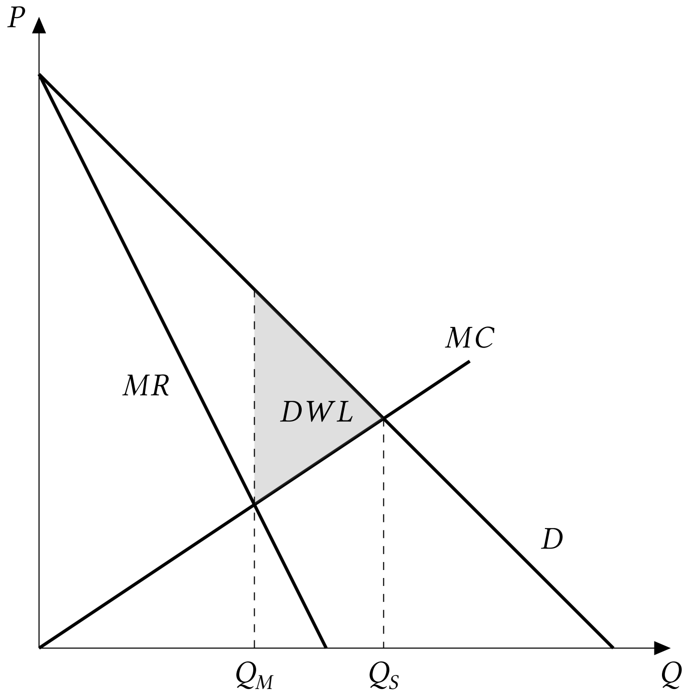
а) Утверждение экономиста А верно. Общественные блага — частный случай положительного внешнего эффекта. Финансируя общественные блага, потребитель не учитывает, что оказывает влияние и на других потребителей (создает для них выгоду), так как общественные блага неисключаемые. Из-за этого типичной проблемой является недопроизводство общественных благ — ровно то, что предсказывает теория положительных экстерналий.

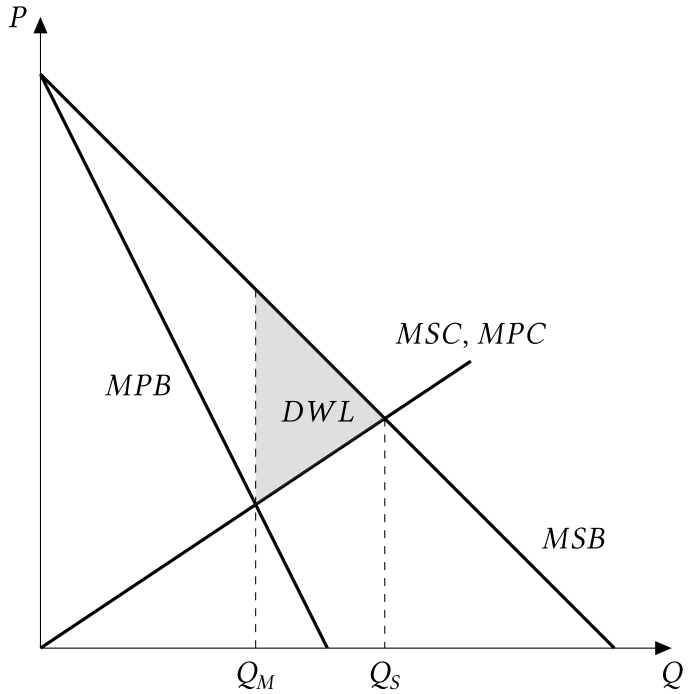
б) Утверждение экономиста Б верно. В стандартной модели монополист назначает одинаковую цену за все единицы товара, потому что не знает, сколько каждый потребитель готов заплатить за каждую единицу (имеет место асимметрия информации). Если бы монополист обладал этой информацией, то он продавал бы каждую единицу ровно по той цене, которую за нее готовы заплатить (такое ценообразование известно как совершенная ценовая дискриминация — в обычном случае она монополисту недоступна), и смог бы продать в том числе те единицы, которые в стандартной ситуации не продаются. Весь излишек в данном случае достался бы монополисту, однако объем продаж соответствовал бы совершенной конкуренции и потерь благосостояния (DWL) бы не было.

Альтернативное решение. При симметрии информации государство знает функцию издержек монополиста и может назначить потолок цены, которая сложилась бы при совершенной конкуренции фирм с такой функцией издержек. Тогда потерь благосостояния (DWL) не будет и излишек потребителя может быть положительным.

Баллы за такое решение выставлялись, только если был приведен *конкретный пример* государственного регулирования, например, введение потолка цен на уровне совершенной конкуренции. Без конкретного примера решение считается неполным.

в) Принимая решение о выпуске, монополист сравнивает свои MR и MC. Однако дополнительная выгода потребителей больше, чем MR продавца. Как видно из графика, ситуацию можно представить в виде стандартной проблемы недопроизводства блага при положительном внешнем эффекте.





г) Верно. Например, в олигополиях, где фирмы конкурируют по объему выпуска, каждая фирма, производя дополнительную единицу продукции, не учитывает, что рыночная цена снижается и для других фирм. Это не что иное, как отрицательная экстерналия, которая приводит, как и положено, к слишком большому объему производства (по сравнению с той ситуацией, когда решение принимал бы монополист без этого внешнего эффекта). Из-за этого суммарная прибыль фирм меньше максимально возможной. (Хотя, надо сказать, для потребителей наличие такой экстерналии выгодно.)

Схема проверки

- Во всех пунктах 3 балла ставится за полностью верное объяснение.
- Верный ответ без полного объяснения не оценивается.
- Если в пункте приведено полностью верное рассуждение, однако сделан неверный вывод и написано, что экономист неправ, за пункт ставился 1 балл.

Дополнительные комментарии:

б) *Для альтернативного решения.* Решение без конкретного примера государственного вмешательства и указания, в каком размере должна быть назначена цена или выдана субсидия, считается неполным и оценивается в 0 баллов.

в) Если указано, что фирма максимизирует свою прибыль, *не заботясь о благосостоянии потребителей*, но не указано, в чем именно заключается внешний эффект на потребителей, ставился 1 балл. Если при этом сделан вывод, что высказывание неверно, пункт оценивается в 0 баллов.

Если указано только, что монополист максимизирует прибыль, но не указано, что он не заботится об общественном благосостоянии или излишке потребителей, то ставится 0 баллов.

За другие неполные ответы ставится 0 баллов.

г) Если не указано стратегическое взаимодействие и в чем именно заключается внешний эффект, ставится 0 баллов.

Идеи о дополнительных расходах на рекламу, получение информации и т. п. без описания стратегического взаимодействия и сути внешнего эффекта не оцениваются.

Задача 3. *Субсидия в условиях недостатка данных* *(12 баллов)*

В региональном этапе олимпиады вы решали задачу, в которой вам предлагалось найти ставку субсидии, которая приведет к восстановлению изначального равновесия на рынке после шока предложения. Для нахождения этой ставки вам была дана эластичность предложения в точке равновесия, но в жизни такая информация не всегда доступна тем, кто проводит экономическую политику.

Рассмотрите снова рынок товара X, спрос и предложение на котором в любой момент времени описываются линейными функциями. Изначально равновесная цена равна 40, а выпуск — 20. Из-за пандемии нарушились цепочки поставок, и предложение товара упало. Цена повысилась до 50, а выпуск сократился до 10.

Министерство экономики считает правильным ввести субсидию *в процентах от цены потребителя*, чтобы цена для потребителя опустилась обратно до 40. (Субсидия выплачивается производителю.) Вы — сотрудник министерства, которому нужно рассчитать ставку этой субсидии. Вы знаете только то, что описано выше, а также из опроса экспертов знаете, что коэффициент эластичности предложения по цене в новой точке равновесия ($P = 50$, $Q = 10$) лежит на отрезке от 1 до 10.

а) *(6 баллов)* Определите минимальную ставку субсидии s в процентах от цены потребителя, после введения которой цена для потребителя *гарантированно* опустится на уровень *не выше* 40.

б) *(2 балла)* Определите возможные значения равновесного выпуска, если будет введена субсидия по ставке s, найденной вами в пункте **а)**.

в) *(4 балла)* Определите возможные значения расходов на выплату субсидии, если будет введена субсидия по ставке s, найденной вами в пункте **а)**.

Решение

а) Восстанавливая функцию спроса по двум точкам $P = 50$, $Q = 10$ и $P = 40$, $Q = 20$, получаем $Q_d = 60 - P$.

Пусть новая (после падения) функция предложения есть $Q = cP - d$. Предложение точно проходит через точку $P = 50$, $Q = 10$, поэтому $10 = 50c - d$, $d = 50c - 10$, так что

$$q_1 = cP + 10 - 50c$$

Эластичность предложения в данной точке равна

$$E = c\frac{P}{Q} = c\frac{50}{10} = 5c.$$

По условию, $E \in [1; 10]$, откуда $c \in [0{,}2; 2]$.

В результате введения процентной субсидии кривая предложения поворачивается: $q_2 = c \cdot s \cdot P - d$, где s — то, во сколько раз цена производителя больше цены потребителя при введении субсидии.

Функция предложения должна пройти через точку $Q = 20$, $P = 40$, или ниже, откуда

$$20 \leqslant c \cdot s \cdot 40 - d = c \cdot s \cdot 40 + 10 - 50c.$$

$$s \geqslant \frac{10 + 50c}{40c} = \frac{1}{4c} + \frac{5}{4}$$

Нам нужно найти минимальное значение s, при котором данное неравенство выполняется для всех $c \in [0{,}2; 2]$. Правая часть убывает по c, поэтому неравенство выполнено для всех $c \in [0{,}2; 2]$ при *наименьшем* c из этого отрезка, $c = 0{,}2$. Значит, искомый минимальный коэффициент субсидии есть

$$s_{min} = \frac{1}{4 \cdot 0{,}2} + \frac{5}{4} = 1{,}25 + 1{,}25 = 2{,}5.$$

Значит, искомая ставка субсидии есть $s - 1 = 1{,}5$.

Ответ: 150 %.

Примечание: Значение $c = 0{,}2$ соответствует минимальной эластичности $E = 1$. До того, что нужно брать минимальную эластичность, можно додуматься на основе экономической интуиции. Действительно, нам нужно увеличить выпуск, а эластичность предложения как раз и есть параметр, который показывает, насколько легко фирмы готовы увеличить выпуск при увеличении цены. Чем меньше эластичность, тем меньше фирмы готовы увеличивать выпуск, и тем хуже ситуация для нас. Нам нужно, чтобы субсидия сработала даже в худшем случае, и поэтому нужно рассчитывать субсидию исходя из минимальной эластичности.

б) Найдем новое равновесие после введения субсидии по ставке 150 %.

$$60 - P = 2{,}5cP - 50c + 10,$$

откуда $P = 20 + \frac{30}{2{,}5c+1}$, $Q = 60 - P = 40 - \frac{30}{2{,}5c+1}$. Q монотонно возрастает по c, поэтому максимальное Q соответствует максимальному c, а минимальное Q соответствует минимальному c. При $c = 0{,}2$ $Q = 20$, при $c = 2$ $Q = 35$.

Ответ: $Q \in [20; 35]$.

в) Возможен долгий вывод расходов в зависимости от эластичности или коэффициента c, но это не требуется.

Будем рассматривать расходы на выплату субсидии как функцию от Q. Эти расходы равны

$$S = 1{,}5 \cdot P \cdot Q = 1{,}5 \cdot (60 - Q)Q.$$

Нам нужно лишь найти максимальное и минимальное значение этой квадратичной функции на отрезке $[20; 35]$.

Ветви параболы направлены вниз, поэтому максимум достигается в вершине $Q^\star = 30 \in [20; 35]$. Максимальное значение расходов на выплату субсидии составляет $1{,}5 \cdot 30^2 = 1350$. В силу симметричности параболы, минимальное значение достигается в более далеком от вершины конце отрезка, то есть при $Q = 20$; оно равно $1{,}2 \cdot 40 \cdot 20 = 1200$.

Ответ: $S \in [1200; 1350]$.

Примечание: если ошибочно предположить, что минимум и максимум расходов достигаются при крайних значениях Q, то можно прийти к неверному ответу $[1200; 1312{,}5]$.

Схема проверки

а) Всего за пункт — **6 баллов**.

- Построение функции спроса — **1 балл**.
- Построение функции предложения — **1 балл**.
- $q_1 = cP + 10 - 50c$ или другое полное описание возможных функций предложения — **1 балл**.
- Аналитическое введение субсидии — **1 балл**.
- $s = \frac{1}{4c} + \frac{5}{4}$, $c \in [0{,}2; 2]$ — **1 балл**.
- Идея о том, что надо брать минимальное c — **1 балл**.

б) Всего за пункт — **2 балла**.

- Нахождение $q_{min} = 20$ — **1 балл**.
- Нахождение $q_{max} = 35$ — **1 балл**.

в) Всего за пункт — **4 балла**.

- Нахождение $S_{min} = 1200$ — **1 балл**.
- Нахождение $S_{max} = 1350$ — **3 балла**.

Задача 4. *Выбираем рыночную нишу* *(12 баллов)*

На рынке жизненно необходимых виджетов есть две фирмы, — 1 и 2, а также очень большое число покупателей. Виджеты, выпускаемые разными фирмами, могут отличаться по качеству и цене. Полезность покупателя от покупки товара качества x по цене p задается уравнением $U = w \cdot x - p$, где w — готовность данного покупателя платить за единицу качества. У разных покупателей w разная, причем параметр w распределен среди населения равномерно на отрезке $[0; 1]$, то есть для любых w_1, w_2 таких, что $0 \leqslant w_1 \leqslant w_2 \leqslant 1$, доля людей, чья w лежит на отрезке $[w_1; w_2]$, равна $w_2 - w_1$. Например, доля людей, чья w находится на отрезке $[0{,}4; 0{,}7]$ равна $0,3$. Из всех виджетов, предложенных на рынке, покупатель выбирает тот, полезность от покупки которого наибольшая. Если покупатель не покупает ни один из виджетов, его полезность равна минус бесконечности. Общие издержки каждой из фирм равны $TC = xQ$, где x — качество товара данной фирмы, Q — количество проданных единиц. Качество товара может быть любым числом на отрезке $[0; 1]$.

Если качество товара уже выбрано, то его сложно изменить. Цены же можно переустаналивать свободно. Поэтому схема взаимодействия фирм выглядит следующим образом:

1. Сначала фирма 1 выбирает качество своего товара x_1.
2. Фирма 2 наблюдает x_1 и затем выбирает качество своего товара x_2. После этого шага качества товаров изменить нельзя. Первые два шага можно интерпретировать как выбор каждой из фирм своей *рыночной ниши.*
3. Затем обе фирмы, зная x_1 и x_2, одновременно и независимо выбирают цены p_1 и p_2. Цены, выбираемые на данном этапе, образуют *равновесие*, то есть цена p_1 должна быть оптимальна для фирмы 1 при фиксированных p_2, x_1, x_2, и наоборот, цена p_2 должна быть оптимальна для фирмы 2 при фиксированных p_1, x_1, x_2.

а) *(1 балл)* Если $p_1 < p_2$, а $x_1 < x_2$, какая доля потребителей купит товар первой фирмы (как функция от x_1, x_2, p_1, p_2)?

б) *(11 баллов)* Найдите качества товаров x_1, x_2 и цены p_1, p_2, которые выберут фирмы.

Решение

а) Если $x_1 < x_2$ и $p_1 < p_2$, то товар более низкого качества купят те потребители, чей параметр w удовлетворяет неравенству $wx_1 - p_1 > wx_2 - p_2$, т.е. $w < \overline{w}$, где $\overline{w} = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}$. Спрос Q_1 на товар первой фирмы равен количеству (массе) тех потребителей, для которых выполняется это неравенство: $Q_1 = \min\{\overline{w}, 1\}$.

б) Игра между фирмами состоит из трёх последовательных стадий: выбор первой фирмой x_1, выбор второй фирмой x_2 и одновременный выбор фирмами p_1 и p_2. В соответствии с алгоритмом обратной индукции будем анализировать эту игру, начиная с третьей стадии — выбора p_1 и p_2.

Предположим сначала, что, как и в пункте **а)**, $x_1 < x_2$. Тогда при заданной цене p_2 первой фирме выгодно выбрать $p_1 < p_2$, иначе её прибыль будет равна нулю. Также должно выполняться неравенство $p_2 - p_1 \leqslant x_2 - x_1$, иначе первая фирма захватывает весь рынок и предлагает слишком низкую цену, которую можно было бы повысить, не теряя контроля над всем рынком, и тем самым увеличить прибыль. Таким образом, $p_2 - x_2 + x_1 \leqslant p_1 < p_2$, и тогда прибыль первой фирмы составляет

$$\pi_1 = \overline{w}(p_1 - x_1) = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}(p_1 - x_1).$$

Эту функцию надо максимизировать по p_1 при $p_2 - x_2 + x_1 \leqslant p_1 < p_2$. Это парабола ветвями вниз, поэтому решение будет в вершине параболы $p_1 = \frac{p_2+x_1}{2}$, если последняя расположена правее, чем левая граница допустимого промежутка $p_2 - x_2 + x_1$. Получаем кривую реакции первой фирмы:

$$\hat{p}_1(p_2) = \max\left\{\frac{p_2 + x_1}{2}, p_2 - x_2 + x_1\right\}.$$

Следуя аналогичной логике, строим кривую реакции второй фирмы: она выбирает p_2 так, чтобы максимизировать свою прибыль

$$\pi_2 = (1 - \overline{w})(p_2 - x_2) = \left(1 - \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}\right)(p_2 - x_2)$$

при ограничениях $p_1 + x_2 - x_1 < p_2 \leqslant p_1$. Кривая реакции второй фирмы:

$$\hat{p}_2(p_1) = \max\left\{\frac{2x_2 + p_1 - x_1}{2}, p_1\right\}.$$

Приведённые выше уравнения кривых реакции верны при $p_1 \geqslant x_1$ и $p_2 \geqslant x_1$, иначе одна из фирм получила бы отрицательную прибыль, чего не может быть при рациональном поведении.

Равновесие в третьей стадии игры — точка пересечения кривых реакции:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \begin{matrix} p_1 = \dfrac{x_1 + 2x_2}{3} \\ p_2 = \dfrac{4x_2 - x_1}{3}. \end{matrix}$$

Следовательно, доли рынка, контролируемые первой и второй фирмой, будут, соответственно, $Q_1 = \frac{2}{3}$ и $Q_2 = \frac{1}{3}$.

Теперь следует заметить, что предположение пункт **а)** не обязательно выполняется в пункте **б)**. В частности, может быть $x_2 < x_1$, и тогда равновесие третьей стадии вычисляется по тем же формулам, с заменой местами индексов 1 и 2:

$$x_2 < x_1 \Longrightarrow \begin{matrix} p_1 = \dfrac{4x_1 - x_2}{3} \\ p_2 = \dfrac{x_2 + 2x_1}{3}. \end{matrix}$$

Доли рынка, контролируемые первой и второй фирмой, будут, соответственно, $Q_1 = \frac{1}{3}$ и $Q_2 = \frac{2}{3}$. Таким образом, мы установили интересный факт: фирма с более низким качеством всегда получит 2/3 рынка независимо от конкретных значений качеств!

Наконец, возможно и такое, что $x_2 = x_1$. В этом случае обе фирмы в равновесии назначают цены $p_1 = p_2 = x_1 = x_2$, дающие им нулевую прибыль. Иначе, если бы прибыль одной из фирм была положительной, например, $p_1 > x_1$, то другая фирма назначила бы цену чуть меньше ($p_2 = p_1 - \varepsilon$ при малом $\varepsilon > 0$) и увеличила бы свою прибыль, получив полный контроль над рынком. Это та же ситуация, что возникает в модели Бертрана.

Теперь будем анализировать вторую стадию игры: выбор второй фирмой $x_2 \in [0; 1]$ при фиксированном $x_1 \in [0; 1]$. Вторая фирма должна решить, занять нишу выше конкурента ($x_2 > x_1$), ту же ($x_2 = x_1$) или ниже ($x_1 < x_2$). Подставим в формулу прибыли второй фирмы вычисленные выше значения p_1 и p_2 для всех трёх рассмотренных случаев:

$$\pi_2(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{3}(p_2 - x_2) = \frac{1}{3}(x_2 - x_1), & \text{если } x_1 < x_2, \\ \frac{2}{3}(p_2 - x_2) = \frac{4}{3}(x_1 - x_2), & \text{если } x_2 < x_1, \\ 0, & \text{если } x_2 = x_1. \end{cases}$$

Эта кусочно-линейная функция имеет V-образный график зависимости от x_2, т. е. достигает максимума по $x_2 \in [0; 1]$ в одной из крайних точек отрезка $[0; 1]$. Подставляя $x_2 = 0$ и $x_2 = 1$ и сравнивая π_2 при этих значениях x_2, получаем оптимальный выбор второй фирмой x_2 в зависимости от x_1:

$$\hat{x}_2(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 < \frac{1}{5}, \\ 0, & \text{если } x_1 > \frac{1}{5}, \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } x_1 = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Наконец, переходим к анализу первой стадии игры — выбора первой фирмой оптимального $x_1 \in [0; 1]$. Подставим в формулу прибыли первой фирмы вычисленные выше значения p_1, p_2 и x_2:

$$\pi_1 = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3} - x_1\right) = \frac{4}{9}(1 - x_1), & \text{если } x_1 < \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{3}\left(\frac{4x_1 - x_2}{3} - x_1\right) = \frac{1}{9}x_1, & \text{если } x_1 > \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{45} \text{ или } \frac{16}{45}, & \text{если } x_1 = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Максимум этой функции по $x_1 \in [0; 1]$ достигается при $x_1 = 0$. Таким образом, ответ на пункт **б)** такой: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{4}{3}$.

Примечания:

- В данной модели мы наблюдаем значительные «силы отталкивания» между фирмами: каково бы ни было x_1, вторая фирма захочет быть в одной из дальних от x_1 точек. Это происходит потому, что одинаковое качество приводит к серьезной ценовой войне по Бертрану между фирмами и сводит прибыль на нет. И наоборот, максимально разные качества позволяют сегментировать рынок и тем самым смягчить ценовую конкуренцию.
- В обобщении данной модели первая фирма (лидер) не всегда будет выбирать более низкое качество. Если средние издержки равны не x, а cx, где $c < \frac{\sqrt{7}-1}{2}$, лидер выберет высокое качество $x_1 = 1$, а последователь низкое качество $x_2 = 0$.
- Одновременное равновесие в ценах, предполагаемое в данной модели, можно интерпретировать как результат процесса подстройки, когда любая фирма, чья цена не оптимальна при наблюдаемых качествах и цене конкурента, меняет цену в сторону оптимальной. По ценам такая подстройка может быть достаточно быстрой. По качествам же подобный процесс подстройки затруднен, так как качество товара изменить сложнее. Поэтому выбор качеств моделируется как последовательный, а не одновременный.

Схема проверки

В пункте **а)** 1 балл ставился за ответ $Q_1 = \overline{w} = \frac{p_2-p_1}{x_2-x_1}$, даже если не указано, что на самом деле $Q_1 = \min\{\overline{w}, 1\}$. За ошибочный ответ $Q_1 = 1 - \overline{w}$ ставилось 0 баллов.

В пункте **б)** три балла ставились за нахождение равновесия для третьей стадии игры: (p_1,p_2) как функции от x_1,x_2 (если строились кривые реакции, то по одному баллу за «главную» секцию каждой из них и один балл за нахождение пересечения).

Один балл ставился за проверку того, что в равновесии третьей стадии не может быть краевого решения, в котором одна из фирм контролировала бы весь рынок. Не обязательно для этого строить полностью обе кривые реакции, состоящие из двух секций, достаточно рассуждения, что в таком равновесии одна из фирм получала бы нулевую прибыль и вследствие этого имела бы стимул отклониться.

Один балл ставился за указание того, что может быть $x_2 < x_1$, и тогда равновесие третьей стадии вычисляется по тем же формулам, что и для случая $x_1 < x_2$, но с заменой местами индексов 1 и 2.

Один балл ставился за проверку того, что в равновесии не может быть $x_2 = x_1$. Годится такая аргументация: поскольку вторая фирма получает нулевую прибыль, она не будет устанавливать $x_2 = x_1$ на второй стадии игры.

Три балла ставились за нахождение $\hat{x}_2(x_1)$ для второй стадии игры: по одному баллу за каждый из участков кусочно-линейной функции π_2 и один балл за нахождение оптимального x_2.

Два балла ставились за нахождение оптимального x_1 для первой стадии игры: один балл за нахождение функции π_1 (или её части, достаточной для получения оптимума) и один балл за нахождение оптимума в задаче максимизации этой функции.

Если правильный ответ на пункт **б)** получен при предположениях пункта **а)**, без рассмотрения случаев $x_2 < x_1$ и $x_2 = x_1$, то из шести последних баллов начисляется только один — за нахождение $\hat{x}_2(x_1)$ для второй стадии игры при $x_1 < x_2$. Все остальные баллы, в том числе, последний, за получение правильного ответа, основываются на правильно вычисленных кусочно-линейных функциях прибыли, поэтому не могут быть начислены.

За арифметическую ошибку, не влияющую существенно на дальнейший ход решения и экономический смысл результатов, из оценки вычитался один балл.

К оценке мог быть добавлен один балл, если был явно сформулирован детальный план правильного решения, пусть и не реализованный корректно.

Задача 5. *Один магазин на две деревни* *(12 баллов)*

Население деревни Виллярибо проживает равномерно[1] на отрезке $[0; 1]$, а деревни Виллабаджо — равномерно на отрезке $[2; 3]$. В Виллярибо и Виллабаджо приехал владелец сети магазинов «Кукумбрикс», который объявил, что сеть построит первый и единственный магазин в окрестности, а в какой точке прямой $(-\infty; +\infty)$ он будет построен — решать жителям деревень. Конечно, каждый житель хочет, чтобы магазин был построен как можно ближе к его дому.

Обычно все общие географические вопросы жители Виллярибо и Виллабаджо решают, используя механизм «Посередине между делегатами». А именно, сначала каждая деревня выбирает по одному делегату. Затем, если дом делегата Виллярибо находится в точке с координатой a, а дом делегата Виллабаджо имеет координату b, то решением вопроса является точка с координатами $\frac{a+b}{2}$. Делегатом a будем называть того, который живет в точке с координатой a.

а) *(2 балла)* Изобразите на прямой $(-\infty; +\infty)$ множество всех точек, в которых хотя бы при какой-нибудь паре делегатов может быть построен магазин.

б) *(2 балла)* Докажите, что жителям Виллярибо для выбора делегата не нужна информация о делегате от Виллабаджо: если житель Виллярибо x предпочитает делегата от Виллярибо a_1 делегату a_2 при делегате от Виллабаджо b_1, то житель Виллярибо x предпочтет делегата от Виллярибо a_1 делегату a_2 при любом другом делегате от Виллабаджо b_2.

в) *(3 балла)* В этом и только в этом пункте считаем, что жители деревень выбирают в качестве делегата *победителя по Кондорсе* — такого жителя деревни, что его предпочтет не менее половины жителей этой деревни при голосовании против любого другого жителя деревни (корректность определения следует из предыдущего пункта). Где будет построен магазин?

г) *(3 балла)* Говорят, что механизм принятия решений является манипулируемым, если существует такая пара делегатов от деревень, что хотя бы одному из делегатов выгодно скрыть настоящее место расположения своего дома и использовать для принятия решения какую-то другую координату. Докажите, что описанный механизм принятия решений является манипулируемым.

д) *(2 балла)* Предложите какой-нибудь механизм принятия решений, выдающий по паре делегатов a и b место для магазина и не являющийся манипулируемым.

Решение

а) По условию задачи $0 \leqslant a \leqslant 1$ и $2 \leqslant b \leqslant 3$. Следовательно,

$$1 \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant 2$$

Любая точка x из интервала $[1; 2]$ в действительности может быть получена в качестве места строительства магазина при паре делегатов $a = x - 1$ и $b = x + 1$. Таким образом, ответ в пункте **а)** — интервал $[1; 2]$.

[1] Это значит, что на любом отрезке длиной $\alpha \leqslant 1$ внутри отрезка $[0; 1]$ проживает доля α населения деревни.

б) Из пункта **а)** и условия задачи следует, что магазин всегда будет располагаться не левее любого из жителей Вилларибо. Следовательно, произвольный житель Вилларибо x, сравнивая двух кандидатов в делегаты от Вилларибо a_1 и a_2, предпочтет того из них, кто находится левее, чтобы разместить магазин как можно левее. Это верно при любом кандидате из Виллабаджо. Таким образом, предпочтения жителей Вилларибо на множестве возможных делегатов от Вилларибо не зависят от делегата от Виллабаджо.

в) В пункте **б)** мы доказали, что каждый житель Вилларибо из двух кандидатов в делегаты будет предпочитать того, кто живет левее. Следовательно, кандидат, живущий в точке 0, будет победителем по Кондорсе: за него проголосуют все жители против любого другого кандидата a. Аналогично, победителем по Кондорсе от Виллабджо является кандидат, живущий в точке 3. Значит, магазин будет построен в точке 1,5.

г) Рассмотрим, например, пару делегатов $a = 1$, $b = 2$. Тогда магазин будет построен в точке 1,5. Однако делегату a выгодно соврать и назвать $a_1 = 0$: в этом случае при том же самом b магазин будет построен в точке 1. Следовательно, описанный механизм принятия решений является манипулируемым.

д) Например, рассмотрим функцию $f(a, b) = 0$. Она задает константный механизм принятия решений, при котором независимо от делегатов магазин строится в точке 0. Этот механизм неманипулируем: скрывать свое место проживания делегату не имеет смысла, ведь магазин все равно будет построен в точке 0.

Схема проверки

а) За правильный ответ ставится **1 балл**. Корректное доказательство приносит еще **1 балл**.

б) За неполный перебор всех возможных пар a_1 и a_2 **снимается 1 балл** (например, часто правильно сравнивали 0 и $a_2 > 0$, но при этом забывали сравнить $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$).

в) За доказательство того, что все жители Вилларибо предпочитают 0 любой другой альтернативе, ставится **+1 балл**.

За доказательство того, что все жители Виллабаджо предпочитают 3 любой другой альтернативе, ставится **+1 балл**.

За правильный ответ при наличии найденных точек 0 и 3 ставится **+1 балл**. Правильный ответ при неправильном решении не оценивался.

г) Оценка в этом пункте бинарна: за наличие примера с манипулированием и доказательство того, что он подходит, ставится **3 балла**. В остальных случаях **ставится 0**.

д) Оценка в этом пункте бинарна: за приведенный пример функции $f(a, b)$ и доказательство того, что механизм неманипулируемый, ставится **2 балла**.

Если участник олимпиады привел несколько примеров, среди которых есть некорректный, то ставится **0 баллов**.

Задача 6. *Продажа валютной выручки* *(12 баллов)*

В стране Альфа национальной валютой является тугрик, а рынок нефти совершенно конкурентный. На рынке присутствует 100 фирм, функция издержек каждой из которых имеет вид $TC = 200q^2$, где q — выпуск фирмы, TC — общие издержки (в тугриках). Внутренний спрос на нефть описывается уравнением $Q = 100 - P/4$, где P — внутренняя цена (в тугриках). Фирмы могут также экспортировать нефть по мировой цене 8 долларов за единицу. Каждая фирма должна оплачивать свои издержки тугриками, а прибыль держит в долларах (при необходимости докупая их). Внутренний спрос делится поровну между фирмами. Импорт нефти в страну запрещен. Изначально на счетах фирм нет долларов и тугриков.

Спрос других экономических агентов на доллары описывается уравнением $D = 480 - 8e$, где e — обратный валютный курс тугрика (цена доллара в тугриках). Спрос может быть отрицательным, если агенты при данном курсе предпочитают продавать доллары, а не покупать. Например, при курсе $e = 100$ будет иметь место предложение долларов в размере $|480 - 8 \cdot 100| = 320$. Нефтяные компании воспринимают валютный курс и все цены как заданные.

а) *(3 балла)* При каких значениях e фирмы будут продавать нефть как на внутреннем, так и на внешнем рынке?

б) *(2 балла)* Найдите функцию предложения долларов нефтяными компаниями (как функцию от e) для значений e, найденных вами в пункте **а)**. Предложение отрицательно, если фирмы предъявляют спрос на доллары.

в) *(3 балла)* Найдите функцию предложения долларов нефтяными компаниями для всех $e \geqslant 0$ и равновесный курс e.

г) *(3 балла)* Государство обязало каждую нефтяную компанию обменивать на тугрики как минимум долю $\alpha \in [0; 1]$ долларовой выручки, а покупать доллары им запретило. Считайте, что каждая фирма стремится сохранить на счету максимальное возможное количество долларов. Найдите равновесный курс e как функцию от α.

д) *(1 балл)* Допустим, вместо того, чтобы обязывать отечественные фирмы продавать долю валютной выручки, государство обязывает иностранцев покупать нефть страны Альфа только за тугрики. Основываясь на ваших результатах выше, определите, чему будет равен равновесный валютный курс в этом случае.

Решение

а) Найдем функцию предложения каждой фирмы. Используя $P = MC$ или максимизируя прибыль $Pq - 200q^2$, получаем, что $q_s = P/400$, а значит, рыночное предложение описывается уравнением $Q = P/4$.

Если фирма продает нефть на двух рынках, то цена в тугриках на внутреннем рынке должна быть равна цене на международном с учетом валютного курса, то есть $P = 8e$. Действительно, иначе она будет поставлять только на тот рынок, где цена больше.

Чтобы имел место внутренний спрос, P должно быть меньше 400. Чтобы фирмы могли экспортировать часть нефти, должен быть избыток товара на рынке, то есть $P/4 > 100 - P/4$, откуда $P > 200$. Поскольку $200 < P < 400$, $200 < 8e < 400$, откуда

$25 < e < 50$.

Ответ: $e \in (25; 50)$.

б) Пусть TR_{exp} — экспортная валютная выручка фирмы в долларах, TR_{vn} — ее внутренняя выручка в тугриках. Тогда прибыль фирмы в тугриках равна $eTR_{exp}+TR_{vn}-TC$, прибыль в тугриках равна $TR_{exp} + (TR_{vn} - TC)/e$.

Соответственно,

- Если $TR_{vn} - TC > 0$, фирма будет продавать тугрики в размере $TR_{vn} - TC$ и покупать доллары, ее спрос на доллары будет равен $(TR_{vn} - TC)/e$, а предложение равно $-(TR_{vn} - TC)/e = (TC - TR_{vn})/e$.
- $TR_{vn}-TC < 0$, фирма не будет хватать рублей, чтобы внутренней выручкой оплатить издержки, фирма будет продавать доллары, чтобы восполнить эту разницу. Предложение долларов составит $(TC - TR_{vn})/e$.

Значит, так или иначе, предложение фирмой долларов будет равно $(TC - TR_{vn})/e$. Предложение всеми фирмами долларов будет равно $100(TC - TR_{vn})/e$.

Выразим эту величину только через e.

$$TC = 200q^2 = 200(P/400)^2 = P^2/800 = (8e)^2/800 = 8e^2/100,$$
$$100TC = 8e^2,$$
$$100TR_{vn} = 100Pq_{vn} = P(100 - P/4) = 8e(100 - 2e).$$

Значит,

$$S(e) = 100(TC - TR_{vn})/e = \frac{8e^2 - 800e + 16e^2}{e} = 24e - 800.$$

Ответ: $S(e) = 24e - 800$.

в) Поймем, что происходит при $e \geqslant 50$ и $e \leqslant 25$.

- При $e \geqslant 50$, фирмы продают нефть только на внешний рынок, а значит, им надо будеть продавать доллары в размере TC/e, чтобы оплатить издержки. Значит $S(e) = 100TC/e = 8e^2/e = 8e$.
- При $e \leqslant 25$, фирмы не будут продавать за рубеж. Поскольку импорт запрещен, страна не будет участвовать в международной торговле. Всю тугриковую прибыль фирмы будут менять на доллары. Цена будет равна 200, количество 50, индивидуальное количество равно 0,5, поэтому издержки фирм будут $100TC = 100 \cdot 200 \cdot 0{,}5^2 = 100 \cdot 200/4 = 5000$. Прибыль фирм равна $50 \cdot 200 - 5000 = 5000$ тугриков. Значит, их спрос на доллары составит $5000/e$, а предложение долларов $S(e) = -5000/e$.

В обобщенном виде:

$$S(e) = \begin{cases} -5000/e, & e \leqslant 25; \\ 24e - 800, & e \in (25; 50); \\ 8e, & e \geqslant 50. \end{cases}$$

Пересечение предложения со спросом $D(e) = 480 - 8e$ будет на среднем участке, $e^{\star} = 40$.

Ответ: предложение дано выше, равновесный курс равен 40.

г) Валютная выручка равна $8Q_{exp} = 8(P/4 - (100 - P/4)) = 4P - 800 = 32e - 800$.

Поэтому новое предложение долларов при $e < 50$ будет описываться уравнением

$$S(e) = \max\{0; 24e - 800; \alpha(32e - 800)\}.$$

Поскольку предложение точно не снизится, курс не повысится по сравнению с 40, а значит случай $e > 50$ рассматривать не нужно.

В изначальном равновесии фирмы продают долю валютной выручки в размере

$$\frac{24e - 800}{32e - 800} = \frac{24 \cdot 40 - 800}{32 \cdot 40 - 800} = \frac{1}{3}.$$

Получаем, что при $\alpha \le 1/3$ вмешательство государства не повлияет на равновесие, а при $\alpha \in (1/3; 1]$ равновесный курс будет $(60 + 100\alpha)/(1 + 4\alpha)$. В итоге

$$e(\alpha) = \begin{cases} 40, & \alpha \leqslant 1/3; \\ \frac{60+100\alpha}{1+4\alpha}, & \alpha \in (1/3; 1]. \end{cases}$$

д) Продажа за тугрики означает, что иностранцам придется покупать на рынке тугрики и продавать доллары в размере всей валютной выручки фирмы, то есть это эквивалентно случаю $\alpha = 1$.

Значит, ответом будет $e(1) = 32$.

Ответ: 32 тугрика за доллар.

Схема проверки

а) Всего за пункт — 3 балла.

- Получение функции предложения (индивидуальной или общей) — **1 балл**.
- Получение границы $e > 25$ — **1 балл**.
- Получение границы $e < 50$— **1 балл**.

Если участник верно решал задачу для монополии, он получал за пункт **1 балл**. (за границу $e < 50$).

б) Всего за пункт — 2 балла.

- Идея о том, что предложение валюты равно $(TC - TR_{vn})/e$ — **1 балл**.
- Расчет этой величины — **1 балл**.

Если участник верно решал задачу для монополии, он получал за пункт **1 балл**. (за идею).

в) Всего за пункт — 3 балла.

- Предложение при $e > 50$ — **1 балл**.
- Предложение при $e < 25$ — **1 балл**.
- Нахождение равновесного курса — **1 балл**.

Если участник верно решал задачу для монополии, он получал за пункт все три балла (не штрафовался).

г) Всего за пункт — 3 балла.

- Расчет величины валютной выручки — **1 балл**.
- Нахождение порога $\alpha = 1/3$ — **1 балл**.
- Расчет $e(\alpha)$ при $\alpha > 1/3$ — **1 балл**.

Если участник верно решал задачу для монополии, он получал за пункт все три балла (не штрафовался).

д) Идея о том, что нужно взять $e(1)$ — **1 балл**. Если участник верно решал задачу для монополии, он не штрафовался за этот пункт.

Таким образом, верное решение для монополии могло принести **9 баллов** из 12.

Задача 7. *Размер семьи и предложение труда* *(12 баллов)*

Как вы знаете из одного из заданий регионального этапа, экономисты исследуют поведение людей в практически любом контексте. Так, важным разделом экономической науки является экономика семьи. Одним из центральных вопросов в этой области является следующий:

> *Верно ли, что увеличение количества детей в семье приводит (в смысле причинно-следственной связи) к снижению предложения труда их матери?*

Обсуждению исследований этого вопроса и посвящена данная задача.

а) *(2 балла)* Объясните, почему ответ на данный вопрос не очевиден, то есть почему увеличение количества детей может теоретически (1) не влиять на предложение труда их матери; (2) привести к увеличению предложения труда их матери.

б) *(4 балла)* Допустим, в статистических данных вы видите отрицательную корреляцию между количеством детей у женщины и величиной ее предложения труда. Например, в семьях с 0 детей женщина работает в среднем 40 часов в неделю, в семьях с 1 ребенком — 30 часов, с 2 — 25, с 3 и более — 20 часов в неделю. Объясните, почему из этого *не* следует, что рост количества детей является причиной снижения предложения труда женщин. Приведите *два* разных объяснения.

в) *(5 баллов)* В 2021 г. Премия Банка Швеции по экономических наукам памяти Альфреда Нобеля была присуждена за развитие метода *естественных экспериментов*, который позволяет получить ответы на многие исследовательские вопросы в условиях, когда провести «обычный» эксперимент не представляется возможным. Этот метод основан на том, что часть людей может подвергаться случайному воздействию в ходе самой жизни, естественным образом. Это случайное воздействие может быть не связано с разнообразными характеристиками людей. Поэтому сравнивая тех, кто подвергся воздействию, с теми кто не подвергся, можно сделать вывод о том, является ли воздействие причиной изменения других переменных — как если бы мы сами оказывали воздействие на людей в ходе эксперимента.

Какой естественный эксперимент позволяет ответить на вопрос, который мы обсуждаем в этой задаче? (Подсказка: сама природа все время проводит такой эксперимент.) Объясните, как работает этот эксперимент.

г) *(1 балл)* Вооружившись данными эксперимента, приведенного вами в предыдущем пункте, можно ответить и на другие важные исследовательские вопросы. Приведите пример такого вопроса и объясните, почему важно знать ответ на него.

Решение

а) Условия, при которых увеличение количества детей не влияет на предложение труда их матери: высокий достаток семьи (мужа или родителей), при котором у матери не возникает необходимости работать; наличие няни или бабушки/дедушки, готовых сидеть с ребёнком; культурные установки, согласно которым женщина не должна работать (в обществе в целом или в конкретной семье); особенности работы матери, из-за которых невозможно регулирование продолжительности рабочего дня.

Основное условие, при котором увеличение количества детей повышает предложение труда их матери, — это необходимость зарабатывать больше денег для того, чтобы обеспечивать увеличившуюся семью.

б) В этом пункте необходимо привести два разных объяснения, каждое оценивается в 2 балла. Примеры хороших объяснений:

- Благосостояние семьи: более обеспеченные семьи могут позволить себе большее число детей, при этом в более обеспеченных семьях у женщин меньше стимулов работать.
- Карьерные предпочтения женщины: женщина одновременно определяет своё предложение труда и желаемое количество детей на основе собственных предпочтений.
- Не рост количества детей является причиной снижения предложения труда, а наоборот: при снижении предложения труда у женщины появляется больше времени, которое можно посвятить воспитанию детей, и в семье принимается решения завести ещё одного ребёнка.

Как правило, основные способы объяснения относятся либо к наличию пропущенных переменных (первые два пункта в списке выше), которые влияют и на количество детей, и на предложение труда, либо к обратной причинности (третий пункт в списке выше). Формальное указание этих механизмов (пропущенных переменных или обратной причинности) без привязки непосредственно к задаче оценивалось в 1 балл.

в) Ключевой момент естественного эксперимента — это то, что он представляет собой случайное воздействие, которое при этом влияет на количество детей. Важно, что при естественном эксперименте число детей не является сознательным решением родителей, и именно поэтому мы можем считать, что нет никаких пропущенных переменных, влияющих на количество детей (оно случайно) и нет влияния предложения труда на количество детей (опять же, потому что оно случайно). Примеры такого воздействия (правильный пример воздействия с механизмом) оценивается в 3 балла. Они могут быть, например, такими:

- Рождение двойни (или большего числа детей одновременно). Если сравнивать женщин с одним ребёнком и женщин, родивших двойню, то вся разница в числе детей (один или два) объясняется исключительно случайным фактором и не является их сознательным решением.
- Количество детей, родившихся в результате процедуры ЭКО.
- Внезапная смерть ребёнка (не обусловленная характеристиками родителей).

При этом важно контролировать, чтобы по всем прочим параметрам участвующие в исследовании женщины были сопоставимы.

С дополнительными пояснениями может быть принято сравнение предложения труда бесплодных женщин и женщин с детьми, при условии, что и те, и другие изначально хотели завести детей, а бесплодные не знали о своём бесплодии. Важно, что нельзя сравнивать просто бесплодных женщин и женщин с детьми, потому что наличие/отсутствие ребёнка может быть объяснено не только случайным фактором (бесплодие), но и сознательным выбором женщин (бесплодные могли изначально и не собираться заводить детей или знать о своём бесплодии) и не являться естественным экспериментом.

Неверным является исследование, основанное просто на оценке предложения труда женщин с разным числом детей, в том числе и сравнение женщин с детьми и без. Неверным же является изучение женщин с незапланированными детьми, потому что этот фактор нельзя считать чисто случайным в нормальных условиях (к примеру, потому, что не каждая беременность приводит к рождению ребёнка). Приёмные дети тоже не являются случайным воздействием, поэтому не могут служить естественным экспериментом.

Непосредственно оценка влияния числа детей на предложение труда может быть основана на сравнении предложения труда женщин с одинаковыми характеристиками (возраст, уровень образования, доход и так далее), но разным числом детей, которое обусловлено случайным воздействием. К примеру, можно сравнить похожих по характеристикам женщин, у одной из которых один ребёнок, а у другой — двойня. Описание процедуры оценивается в 2 балла.

г) Большое число исследований, изучающих влияние числа детей на какие-то характеристики их матери или их самих, может быть проведено на основе таких данных. К примеру, влияние числа детей на расходы семьи на одного ребёнка может быть корректно оценено на данных такого эксперимента. Ответ на этот вопрос важно знать, к примеру, для планирования государственной политики в области поддержки рождаемости.

Схема проверки

а) По одному баллу за каждый из подвопросов пункта. Один и тот же аргумент, приведённый дважды, оценивается один раз (одним баллом).

б) По два балла за каждое объяснение.

Одно и то же объяснение, приведённое дважды, оценивается один раз (двумя баллами).

Ответ без механизма не засчитывается (к примеру, просто указание на то, что благосостояние семьи влияет на оба показателя без объяснения почему и каким образом).

Формальное описание механизма без привязки к задаче оценивается в 1 балл (просто указание на наличие пропущенных переменных, просто указание на возможную обратную причинность).

в) 3 балла даётся за случайное воздействие, лежащее в основе исследования, при обязательном упоминании о необходимости контролировать, чтобы женщины были сопоставимы по всем прочим параметрам; 2 балла даётся за описание процедуры оценки влияния числа детей на предложение труда. В случае, если в работе приведено два примера естественного эксперимента (чего не требовалось в задаче), из них один верный и один неверный, штраф в 3 балла.

г) 1 балл ставился за любое подходящее исследование. Важно, что предлагаемое исследование должно быть основано на проведённом эксперименте, количестве детей, и в работе должно быть объяснено, почему знать ответ на этот вопрос важно.

Задача 8. *У самого синего моря* *(12 баллов)*

Старуха посылает Старика к синему морю, чтобы он поймал ей золотую рыбку, которую она ценит в 12 монет. Рыбка нужна только Старухе, больше никому. Старуха обещает дать Старику зарплату в w монет за поход к морю и ещё дополнительный бонус в b монет, если он принесёт ей рыбку. Узнав эти условия (которые Старуха обязана исполнить!), Старик может выбрать одно из двух действий:

- пойти к морю, взять у лодочника в аренду лодку и попытаться поймать рыбку — шансы на успех и неудачу при этом равны;
- пойти к морю, посидеть на берегу и вернуться, сказав, что рыбку поймать не удалось.

Арендная плата за лодку составляет 5 монет и платится после получения всех выплат от Старухи. Но может получиться так, что этих выплат не хватит, — тогда Старик впоследствии, когда у него появятся монеты (предположим, что когда-нибудь это произойдёт), будет вынужден выплатить лодочнику сумму долга в двойном размере.

Старуха не может наблюдать, что делает Старик у моря. Она выбирает неотрицательные величины зарплаты w и бонуса b так, чтобы максимизировать свой усреднённый выигрыш П, состоящий из ценности рыбки (в случае, если Старик её поймает) за вычетом всех выплат Старику. Например, если старуха рассчитывает, что Старик попробует поймать рыбку, то ее усреднённый выигрыш равен

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (12 - w - b) + \frac{1}{2} \cdot (-w).$$

Старик, наблюдая w и b, выбирает одно из своих двух действий так, чтобы максимизировать свои усреднённые выплаты за вычетом того, что он должен отдать лодочнику. Усреднение производится по тому же принципу, что и для Старухи. Предполагаем, что, если Старику безразлично, ловить рыбку или нет, то он ловит.

а) *(3 балла)* Найдите оптимальное действие Старика при заданных $w, b \geqslant 0$;

б) *(3 балла)* Предположим, что Старуха хочет, чтобы Старик ловил рыбку. С учётом ответа на предыдущий пункт найдите w и b, оптимальные для неё в этом случае.

в) *(2 балла)* А действительно ли Старуха хочет, чтобы Старик ловил рыбку? Как устроен оптимальный контракт (w, b) с учётом ответа на этот вопрос?

г) *(4 балла)* Предположим теперь, что Старуха может наблюдать, что делает Старик у моря, и может поставить бонус $b \geqslant 0$ в зависимость от этого: если Старик выходил в море на лодке и поймал рыбку, то $b = b_1$, а если выходил, но не поймал, то $b = b_0$. Теперь Старуха предлагает Старику контракт (w, b_0, b_1). Какой контракт будет оптимальным для Старухи?

Решение

а) В условии задачи слова «сумма долга» могут быть интерпретированы двумя способами: сумма, которой не хватает, чтобы оплатить аренду лодки, или вся арендная плата. Будем использовать первый вариант интерпретации в качестве основного.

Пусть заданы $w, b \geqslant 0$. Выигрыш Старика равен

- если он ловит рыбку:

$$U_1 = \begin{cases} \frac{w-5}{2} + \frac{w+b-5}{2} = w + \frac{b}{2} - 5, & \text{если } w \geqslant 5, \\ w - 5 + \frac{w+b-5}{2} = \frac{3w+b-15}{2}, & \text{если } w < 5 \leqslant w + b, \\ (w-5) + (w+b-5) = 2w + b - 10, & \text{если } w + b < 5; \end{cases}$$

- если он не ловит рыбку: $U_0 = w$.

Если $w + b < 5$, то $U_1 - U_0 = w + b - 10 < 0$, так что в этом случае лучше не ловить.

Если $w < 5 \leqslant w + b$, то $U_1 - U_0 = \frac{w+b-15}{2}$, так что в этом случае нужно ловить рыбку, если $w+b \geqslant 15$ (помним, что при безразличии надо ловить, так что неравенство нестрогое).

Если $w \geqslant 5$, то $U_1 - U_0 = \frac{b}{2} - 5$, так что в этом случае надо ловить, если $b \geqslant 10$.

Итого, надо ловить, если $b \geqslant \max\{15 - w, 10\}$.

Возможна альтернативная интерпретация условия задачи: если Старику не хватает монет, чтобы оплатить аренду лодки, то он платит в двойном размере всю арендную плату, т.е. платит 10 вместо 5. Тогда получается, что

$$U_1 = \begin{cases} w + \frac{b}{2} - 5, & \text{если } w \geqslant 5, \\ w + \frac{b}{2} - \frac{15}{2}, & \text{если } w < 5 \leqslant w + b, \\ w + \frac{b}{2} - 10, & \text{если } w + b < 5, \end{cases}$$

и Старик выходит в море при выполнении хотя бы одного из двух условий: $b \geqslant 15$ или $w \geqslant 5$, $b \geqslant 10$.

б) Выигрыш Старухи, если Старик ловит рыбку, равен

$$\Pi_1 = \frac{12 - w - b}{2} - \frac{w}{2} = 6 - w - \frac{b}{2}.$$

Величину Π_1 надо максимизировать при ограничении $b \geqslant \max\{15 - w, 10\}$. Так как Π_1 убывает по b, это ограничение выполняется как равенство: $b = \max\{15 - w, 10\}$. Подставляя это в формулу для Π_1, получаем

$$\Pi_1 = 6 - w - \frac{\max\{15 - w, 10\}}{2} = \min\left\{\frac{-w-3}{2}, 1 - w\right\}.$$

Правая часть убывает по w, поэтому максимум Π_1 достигается при $w = 0$. Отсюда $b = 15$.

Возможно и другое рассуждение: необходимым условием выхода Старика в море за рыбкой является неравенство $w + b \geqslant 15$. Если бы действовало только это ограничение, то оптимум достигался бы при $w = 0$, $b = 15$, так как коэффициент при w

в функции прибыли Старухи равен -1, а коэффициент при b меньше по модулю и равен $-\frac{1}{2}$. Но при $w = 0$, $b = 15$ выполнено и второе ограничение $b \geqslant 10$, так что это действительно решение задачи Старухи в условиях пункта **б)**.

При альтернативной интерпретации условия задачи множество контрактов (w, b), из которых выбирает Старуха в пункте **б)**, сокращается по сравнению с основной интерпретацией, но контракт $w = 0$, $b = 15$ остаётся доступным и, следовательно, оптимальным. Ответы на пункты **б)**, **в)**, **г)** не зависят от выбора интерпретации.

в) Максимальное значение Π_1, полученное в предыдущем пункте, равно $-\frac{3}{2}$. Это меньше, чем $\Pi_0 = 0$ — выигрыш Старухи, если она предлагает Старику $w = b = 0$, а тот, соответственно, не ловит рыбку. Так что $w = b = 0$ будет оптимальным контрактом. Кроме того, оптимальным будет и контракт с $w = 0$ и $b < 15$, поскольку он также стимулирует Старика не выходить в море и даёт Старухе нулевую прибыль.

г) Если Старуха хочет, чтобы Старик ловил рыбку, то она должна оставить его со средним выигрышем не меньшим, чем w. Для этого, даже если не учитывать возможные дополнительные расходы на возврат долга лодочнику, должно выполняться неравенство $\frac{w+b_0}{2} + \frac{w+b_1}{2} - 5 \geqslant w \Longleftrightarrow b_0 + b_1 \geqslant 10$, а с учётом этих расходов данное неравенство тем более должно выполняться. Контракт (w, b_0, b_1), удовлетворяющий этому неравенству, даёт Старухе выигрыш $\Pi = \frac{12}{2} - w - \frac{b_0+b_1}{2} \leqslant 1 - w \leqslant 1$. Максимально возможный выигрыш, равный 1, может быть получен с помощью контракта $(w, b_0, b_1) = (0, 5, 5)$. Это выгоднее для Старухи, чем не стимулировать Старика ловить рыбку (в этом случае её выигрыш был бы нулевым). Таким образом, $(0, 5, 5)$ является оптимальным контрактом.

Заметим, что никакой другой контракт не является оптимальным для Старухи. Действительно, для любого оптимального контракта перечисленные выше неравенства должны становиться равенствами: $w = 0$, $b_0 + b_1 = 10$. Если $(b_0, b_1) \neq (5, 5)$, то $b_i < 5$ для одного из $i = \{0, 1\}$. То есть у Старика будут дополнительные расходы на возврат долга, которые Старухе придётся компенсировать, из-за чего её прибыль уменьшится.

Схема проверки

Разбиение по баллам условное и относится к тому случаю, когда ход решения близок к изложенному выше. Если ход решения другой, но тоже правильный, то за пункт ставится полный балл.

а) Максимальная оценка за пункт — 3 балла:

- 1 балл за выписывание выигрышей Старика при каждом варианте действия Старика, параметров контракта и успеха/неудачи рыбной ловли;
- 1 балл за выписывание выигрышей Старика, усреднённых по успеху/неудаче;
- 1 балл за получение оптимального действия Старика в зависимости от w и b.

б) Максимальная оценка за пункт — 3 балла:

- 1 балл за выписывание задачи максимизации ожидаемой прибыли Старухи;
- 2 балл за её решение (например, 1 балл за установление того, что $b = \max\{15 - w, 10\}$ и 1 балл за остальное).

в) Максимальная оценка за пункт — 2 балла:

- 1 балл за оптимальный контракт, не стимулирующий Старика ловить рыбку;
- 1 балл за сравнение с контрактом из пункта **б)** и вывод об оптимальном контракте.

г) Максимальная оценка за пункт — 4 балла:

- 1 балл, если доказано, что ожидаемый выигрыш Старика должен быть равен w;
- 1 балл, если доказано, что расходы на возврат долга отсутствуют;
- 1 балл, если доказано, что $w = 0$;
- 1 балл за получение окончательного ответа.

Другой ход решения оценивается соответственно, если он является корректным.