Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Екатеринбург, 20–26 марта 2021 г.

9 класс

Решения

Содержание

Задача 1. *Блиц* *(12 баллов)*

В первом задании олимпиады вам предлагается ответить на несколько не связанных друг с другом коротких вопросов.

а) *(4 балла)* **Экономические Ахиллес и черепаха**. В феврале 2020 года было опубликовано видео беседы известного экономиста М. с известным экономистом Г. Одной из тем беседы стала экономическая гонка США и Китая. Экономист Г. заметил: «Если ВВП на душу населения в США растет с темпом 2 % в год, а в Китае — с темпом 6 % в год, то 4 % — это скорость, с которой Китай догоняет США, и в конце концов, он их догонит». Экономист М. парировал: «Если Китай, с ВВП на душу населения 10 000 долларов, растет на 6 % в год, он прибавляет по 600 долларов на человека. Если США, с ВВП на душу населения 64 000 долларов, растут на 2 % в год, они прибавляют примерно по 1 300 долларов на человека. Поскольку $1300 > 600$, Китай никогда не догонит США». Если приведенные числовые данные верны и темпы прироста ВВП на душу населения будут сохраняться, догонит ли Китай США? Если да, то в чем именно ошибка экономиста М.?

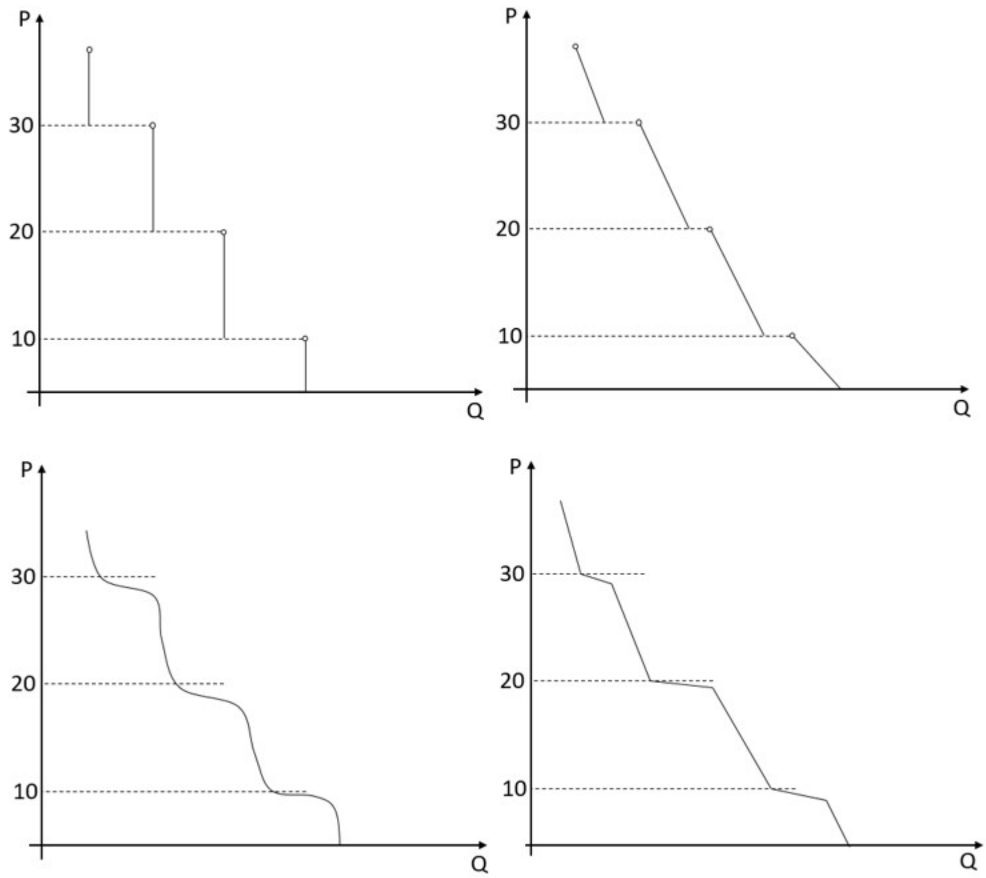
б) *(4 балла)* **Психологическое ценообразование**. Во многих магазинах можно встретить цены, которые немного меньше ближайших к ним целых или круглых чисел: 999 руб., 19,95 $, 29,99 € и т. п. Самое распространенное объяснение использования этой стратегии — особенность психологии восприятия цены некоторыми потребителями. Поняв, что это за особенность, изобразите возможный график кривой спроса, отражающий ее. Из графика должно быть очевидно, почему описанная стратегия ценообразования оптимальна для продавцов. Особенность психологии людей словами описывать не нужно, в ответе должен быть *только график*.

в) *(4 балла)* **Парадокс вакцинации**. Допустим, в разгар эпидемии, вызванной вирусом X, становится доступной вакцина от вируса X, обладающая лишь частичной эффективностью (например, 60 %). Приведите экономическое объяснение того, что в результате появления такой вакцины заболеваемость вирусом X может парадоксальным образом вырасти, а не сократиться.

Решение

а) Если приведенные числовые данные верны и темпы прироста ВВП на душу населения будут сохраняться, Китай, конечно, догонит США. Принимая за нулевой год тот, в котором ВВП на душу населения в США и Китае равны 64000 и 10000 соответственно, подушевой ВВП в США будет равен значению выражения $64000 \cdot 1{,}02^t$, а в Китае — $10000 \cdot 1{,}06^t$, где t — номер года. Ясно, что значение второго выражения при достаточно больших t превысит значение первого. Ошибка экономиста М. заключается в том, что он не учел, что в каждом году проценты будут считаться *от нового* уровня подушевого ВВП. Например, во втором году ВВП Китая вырастет не на 600, а уже на $1{,}06 \cdot 600 = 636$ долл. на человека, и т.д. По-другому ошибку экономиста М. можно сформулировать так: он перепутал простые и сложные проценты. (Когда мы говорим о темпах прироста некой величины, всегда имеются в виду сложные проценты.)

б) Подойдёт любая кривая спроса (с отрицательным наклоном!), такая что её эластичность в точках, где цена принимает значение чуть ниже чисел, оканчивающихся на ноль, по модулю гораздо больше, чем между этими числами. При этом график может быть как с разрывами, так и без. Пример верных графиков:



в) У вакцинированных больше стимулов к рискованному поведению (меньше стимулов к осторожному поведению). Например, вакцинированные могут перестать носить маски или начать встречаться большими компаниями. И при частичной эффективности вакцины такое рискованное поведение может привести к большему распространению вируса.

Примечание: Это сродни классическому эффекту Пельцмана — внедрение ремней безопасности может привести к росту количества аварий и смертей через рост рискованного поведения. Эффект Пельцмана прекрасно описан в книге С. Ландсбурга «Экономист на диване».

Схема проверки

а) Объяснение, что Китай сможет догнать США, основанное на верном описании механизма работы сложных и простых процентов (описание могло быть как словесным, так и даваться в виде верных расчётов по цифрам из задачи) – 4 балла.

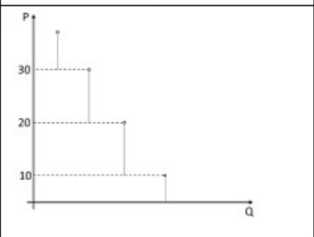
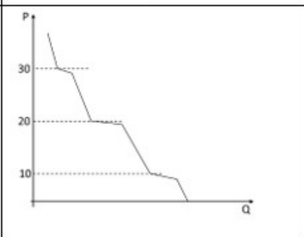
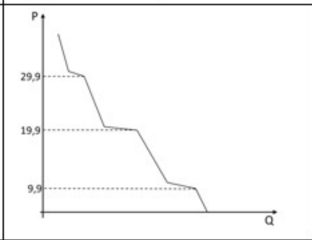
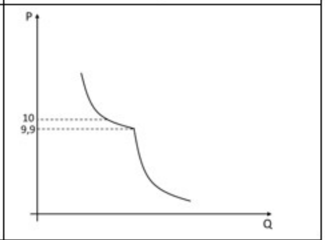
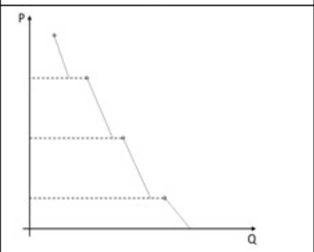
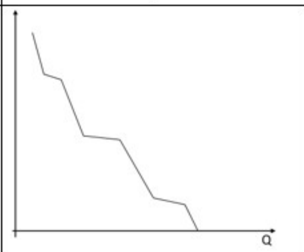
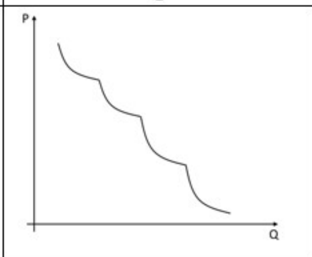
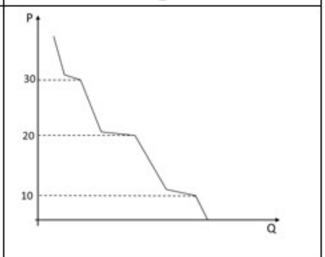
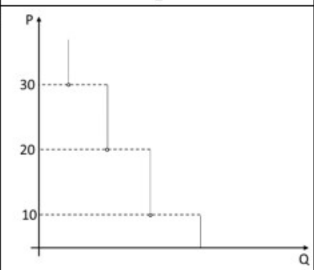
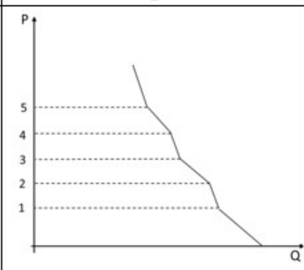
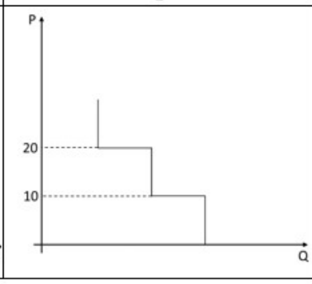
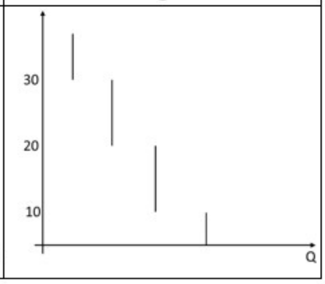
Если в качестве доказательства использовался только расчёт по приростам (с аргументом, что Китай догонит США в момент, когда приросты в денежном выражении сравняются) – 2 балла.

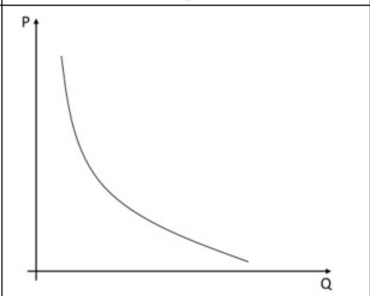
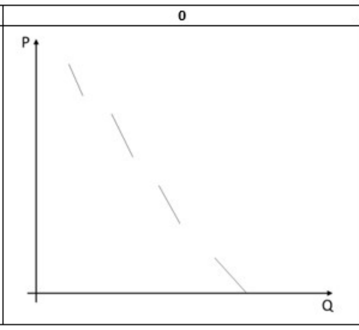
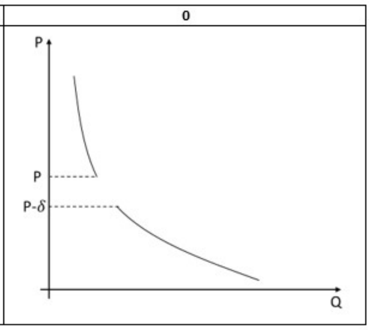
Аргумент, что экономист М. неправ, потому что не учитывал население в США и Китае – 0 баллов.

б) В качестве верного решения засчитывались такие графики, где в качестве пороговой цены использовались любые круглые числа, а также целые числа. Все решения делятся на несколько видов:

- полностью верный график – 4 балла
- график, в котором отсутствуют подписи на оси – 2 балла
- график, в котором есть существенная логическая ошибка (например, выколотая точка расположена не с той стороны), но присутствует идея о смене наклонов или о наличии разрывов – 1 балл
- неверный график (без смены наклона и без разрывов или график, в котором подразумевается бесконечная делимость товара, но при этом существуют цены, для которых спрос не определён) – 0 баллов

Приводим основные виды графиков, встречавшихся в работах с указанием, во сколько баллов оценивался этот вид:

Балл	4	4	4	4
График				
Балл	**2**	**2**	**2**	**1**
График				
Балл	**1**	**1**	**1**	**1**
График				

Балл	0	0	0
График			

в) Есть рассуждение о неосторожном поведении в случае вакцинации – 4 балла.

Рассуждения, не содержащие в себе идеи о неосторожном поведении, оценивались в 0 баллов.

Задача 2. *«Вычитание» КПВ* *(12 баллов)*

Страна A состоит из двух регионов — A_1 и A_2, в стране производится только масло (X) и пушки (Y). У вас есть информация об уравнениях кривых производственных возможностей страны A и региона A_1. Восстановите информацию о КПВ региона A_2: найдите ее уравнение (достаточно привести одно подходящее и доказать, что оно подходит) или докажите, что КПВ страны A и региона A_1 одновременно такими быть не могут. В задаче три пункта, комбинации КПВ приведены в таблице ниже. В пункте **в)** максимальное производство масла в регионе A_1 равно 1.

	КПВ страны A	КПВ региона A_1
а) *(4 балла)*	$Y = 2 - X$	$y_1 = 1 - x_1$
б) *(4 балла)*	$Y = 8 - 2X^2$	$y_1 = 1 - x_1^2$
в) *(4 балла)*	$Y = 2 - X$	$y_1 = 1 - \sqrt{1 - (1 - x_1)^2}$

Решение

а) Легко заметить, что КПВ $y_2 = 1 - x_2$ подходит — сумма ее с самой собой даст КПВ $Y = 2 - X$, ведь альтернативные издержки одинаковы.

Интересным является то, что подходят также и другие КПВ — «разность» КПВ в данном случае не единственна! Например, в силу решения пункта в) как ответ в пункте а) подойдет КПВ региона $A1$ из в пункта в). Действительно, в решении пункта в) доказывается, что сумма $y = 1 - x$ и $y = 1 - \sqrt{1 - (1 - x)^2}$ как раз равна $Y = 2 - X$. Более того, поскольку В пункте в) мы пользовались только тем, что $y_1(0) = 1$, $y_1(1) = 0$ и что $y_1(x_1) \leqslant 1 - x_1$. Поэтому *любая* функция с этими свойствами является разностью этих двух КПВ, приведенных в данном пункте!

б) Заметим, что $y_2(0) = 7$. Если всего нужно произвести $X \in (0; 1]$ единиц Икса, то всегда доступен вариант производить весь Икс в первом регионе. Суммарное производство Игрека в этом случае будет равно $Y = 1 - X^2 + 7 = 8 - X^2$. Но по условию и по определению суммарной КПВ *максимальное* производство Игрека в стране равно $8 - 2X^2 < 8 - X^2$. Противоречие. Ни одна функция $y_2(x_2)$ не может являться КПВ второго региона.

Ответ: КПВ страны и первого региона такими одновременно быть не могут.

в) Перепишем уравнение КПВ региона A_1 как $(1 - y_1)^2 + (1 - x_1)^2 = 1$. Это уравнение окружности радиуса 1 с центром в точке $(1; 1)$. КПВ первого региона соответствует части этой окружности, лежащей внутри области $y \leqslant 1$, $x \leqslant 1$. Заметим, что альтернативные издержки производства Икса в этом регионе не возрастают, а убывают.

Догадка: Мы знаем, что $y_2(0) = 1$ и что $y_2(1) = 0$. При этом суммарная КПВ линейна, и поэтому интуитивно кажется правильным, чтобы и $y_2(x_2)$ была хотя бы на каком-то участке линейна. Поэтому рассмотрим самую простую КПВ, имеющую линейный участок и удовлетворяющую $y_2(0) = 1$, $y_2(1) = 0$, а именно $y_2(x_2) = 1 - x_2$.

Оказывается, эта КПВ и будет ответом.

Обоснование: Докажем, что сумма КПВ $y_1(x_1)$ и $y_2(x_2) = 1 - x_2$ как раз равна $Y(X) = 2 - X$. Сначала покажем, что при $y_2(x_2) = 1 - x_2$ для любого $X \in [0;2]$ мы не можем достичь уровня $Y > 2-X$, а затем покажем, что уровня $Y(X) = 2-X$ мы достичь можем.

Из вида КПВ первого региона следует, что $y_1(x_1) \leqslant 1 - x_1$ для любого $x_1 \in [0;1]$. Тогда запишем соотношения

$$y_1 \leqslant 1 - x_1$$

$$y_2 = 1 - x_2$$

Складывая их, получаем, что $y_1 + y_2 \leqslant 2 - x_1 - x_2 = 2 - X$. Значит, мы не можем достичь большего уровня производства, чем $Y = 2 - X$. Этот вывод можно получить и с помощью графического анализа векторной суммы двух КПВ.

Мы можем достичь уровня $Y = 2-X$ так: при $X < 1$ производим весь Икс в регионе A_2, а при $X > 1$ — весь Игрек в регионе A_2. При $X = 1$ можно выбрать любой из этих двух вариантов. Нетрудно проверить, что производство Игрека будет равно $2 - X$.

Следовательно, сумма КПВ $y_1(x_1)$ и $y_2(x_2) = 1 - x_2$ равна $Y(X) = 2 - X$.

Ответ: $y_2 = 1 - x_2$.

Схема проверки

а) *0 баллов:* неверный пример и неверный ответ; *только 1 балл:* верный пример без вывода функции КПВ 2-ого региона, либо с неверным выводом (или верный пример без обоснования вида КПВ, либо с неверныммобоснованием); *только 2 балла:* вывод правильного вида функции КПВ 2-ого региона, но без полного обоснования; *4 балла:* полное верное решение, при этом доказано, что $max y_1 + y_2$ - есть данная в условии КПВ страны.

б) *0 баллов:* неверные рассуждения при любом ответе, либо частично верные рассуждения, которые привели к неверному ответу; *только 2 балла:* верные рассуждения (не доведенные до конца) которые привели к верному ответу (например, сравнение альтернативных издержек в отдельных точках, либо дан частный вид функции КПВ 2-ого региона); *только 3 балла:* сравнение альтернативных издежек в допустимых интервалах, но отсутствует дальнейшее обоснование, почему это сравнение приводит к невозможности построения фукнции КПВ 2-ого региона; *4 балла:* верные рассуждения, приведшие к верному ответу.

в) *0 баллов:* неверные рассуждения; *только 1 балл:* дан верный ответ без обоснования либо с неверным обоснованием; *только 2 балла:* дан верный ответ, показано, $y_1 + y_2 = 2-X$, но не доказано, что это максимум; *только 3 балла:* дан верный ответ, но не обоснован один из участков линейной КПВ; *4 балла:* верные рассуждения, которые привели к верному ответу.

Задача 3. *Голосование о торговле* *(12 баллов)*

Мировую экономику составляют три страны — A, B и C. В каждой из них функция спроса на рынке товара Икс строго убывает, а функция предложения — строго возрастает, и изначально производится положительное количество товара.

Страны рассматривают возможность открытия международной торговли. Если это произойдет, то на мировом рынке установится единая цена. Решение об открытии торговли будет приниматься на специальном Мировом Съезде Представителей с помощью голосования. На съезд приедет по два представителя от каждой страны, причем один из них будет представлять интересы потребителей, а другой — интересы производителей из этой страны.

Каждый из представителей обладает полной информацией о спросе и предложении во всех странах. Представители голосуют исходя из того, что потребители хотели бы покупать товар подешевле, а производители — продавать подороже. Если некоторая группа безразлична между открытием торговли и не-открытием, то ее представитель на всякий случай голосует против открытия торговли. Если торговля открывается, то в ней обязательно участвуют все три страны.

а) *(3 балла)* Допустим, международная торговля будет открыта, если за это проголосует большинство, то есть как минимум 4 представителя из 6. Может ли при каких-либо функциях спроса и предложения в трех странах, удовлетворяющих условию, быть принято решение об открытии торговли?

б) *(6 баллов)* Как правило, производители имеют больше возможностей для лоббирования собственных интересов, и потому их влияние на принятие подобных решений больше, чем влияние потребителей. Смоделируем это так: предложим, что у каждого представителя потребителей есть один голос, а у каждого представителя производителей — 2 голоса. Решение об открытии торговли будет принято, если за него будет подано больше половины от общего количества голосов, то есть как минимум 5 голосов из 9. Кроме того, предположим, что функции спроса и предложения в странах A, B и C имеют вид, представленный в таблице

Страна	**A**	**B**	**C**
Спрос	$D = \dfrac{a}{\sqrt{P}}$	$D = \dfrac{40}{\sqrt{P}}$	$D = \dfrac{60}{\sqrt{P}}$
Предложение	$S = \sqrt{P}$	$S = \sqrt{P}$	$S = \sqrt{P}$

При каких значениях параметра $a > 0$ торговля будет открыта?

в) *(3 балла)* В стандартной модели совершенной конкуренции (без торговли) производители обычно выигрывают от роста спроса (за счет того, что повышается равновесная цена). Предположим, что накануне Мирового Съезда Представителей спрос в стране A вырос, то есть увеличилось значение параметра a. Верно ли, что это изменение обязательно приведет к росту цены, получаемой производителями из этой страны (с учетом результатов голосования на съезде)?

Решение

а) Обозначим за P единую равновесную цену. Заметим, что в каждой из стран либо одна группа будет голосовать “за”, а другая – “против” (если P не совпадет с равновесной ценой в данной стране в отсутствие торговли), либо обе “против” (если P совпадет с равновесной ценой в данной стране в отсутствие торговли). Так что за открытие торговли будет максимум 3 голоса из 6. Торговля не будет открыта

б) Равновесными ценами без торговли являются $P_A = a$, $P_B = 40$, $P_C = 60$.

Пусть P_1, P_2, P_3 это цены P_A, P_B, P_C, упорядоченные от меньшей к большей, то есть P_1 — минимальная из трех цен, P_3 — максимальная, а P_2 — «срединная». Выполнено $P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3$.

Пусть P_w — мировая цена при открытой торговле. Она определяется равенством мирового спроса и предложения:

$$\frac{a + 40 + 60}{\sqrt{P_w}} = 3\sqrt{P_w},$$

откуда $P_w = \frac{a+100}{3}$. Заметим, что цена P_w равна среднему арифметическому из $P_A = a$, $P_B = 40$, $P_C = 60$. Отсюда $P_1 \leqslant P_w \leqslant P_3$[1] Кроме того, ситуация $P_1 = P_2 = P_3$ невозможна, а значит, $P_1 < P_w < P_3$.

Значит, производители страны с ценой P_1 и потребители страны с ценой P_3 будут за открытие торговли, а производители страны с ценой P_3 и потребители страны с ценой P_1 — против. Итого 3 голоса за и 3 против. Следовательно, все решается в стране со «средней» ценой, с ценой P_2. При $P_w \leqslant P_2$ производители этой страны будут против, и торговля не будет открыта (будет 5 или 6 голосов против). При $P_w > P_2$, наоборот, торговля будет открыта (будет 5 голосов за).

Значит, торговля будет открыта тогда и только тогда, когда $P_w > P_2$.

Найдем, при каких a это так. Рассмотрим три случая.

Случай 1. $a \leqslant 40$. При $a \leqslant 40$ страной с ценой P_2 является страна B, значит условием открытия торговли будет $P_w > P_B$, то есть $\frac{a+100}{3} > 40$, откуда $a > 20$.

Случай 2. $a \in (40; 60)$. При $40 < a < 60$ страной с ценой P_2 является страна A, значит условием открытия торговли будет $\frac{a+100}{3} > a$, откуда $a < 50$.

Случай 3. $a \geqslant 60$. При $a \geqslant 60$ страной с ценой P_2 будет страна C, значит условием открытия торговли будет $\frac{a+100}{3} > 60$, то есть $a > 80$.

Беря соответствующие пересечения и объединение множеств, получаем, что торговля будет открыта при $a \in (20; 50) \cup (80; +\infty)$.

Ответ: при $a \in (20; 50) \cup (80; +\infty)$.

в) При переходе a через порог 80 (например, росте a с 79 до 81) цена в стране A резко упадет из-за открытия торговли. Действительно, при $a = 79$ торговля не будет открыта, и $P_A = a = 79$. При $a = 81$ торговля будет открыта, и производители будут получать $P_w = 181/3 = 60 + (1/3) < 79$. Производители страны A пострадают от роста спроса.

[1] В качестве упражнения докажите, что это неравенство будет выполнено *при любых* функциях спроса и предложения, удовлетворяющих условиям в первом абзаце данной задачи.

Примечание: Так происходит потому, что более высокий спрос в А делает экспорт из В и С более выгодным, суммарное предложение в А растет, и цена в А снижается. По сути, мы имеем частный случай эффекта «спрос рождает предложение».

Схема проверки

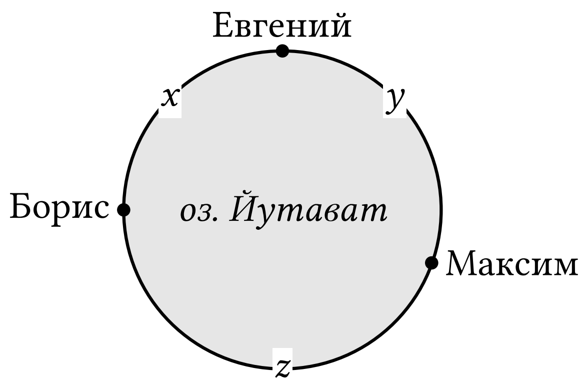
а) 3 балла за доказательство от противного или перебор всех вариантов. -1 балл, если не рассмотрен случай равенства цены после торговли цене до.

б) 1 балл за нахождение цен до торговли и после. 2 балла за доказательство, что если нужно 5 голосов, то цена после торговли должна быть выше P_2. Важно, что не возможна ситуация, когда все три представителя производителей голосуют за. Если этот случай постулировался, но не отвергался в процессе решения, то снижался 1 балл. 3 балла. По 1 баллу за каждый случай, когда P_2 равна цене каждой из стран.

в) 3 балла за пример преодоления порога. Частичные баллы не ставились.

Задача 4. *Круглое озеро* *(12 баллов)*

Озеро Йутават представляет собой идеальный круг. Борис, Евгений и Максим ловят в этом озере рыбу и продают ее местным жителям, которые живут вокруг озера. Каждый день рыбаки независимо друг от друга выбирают, в каких точках на берегу (окружности) озера организовать продажу рыбы. Жители распределены вокруг озера равномерно (то есть на каждый километр расстояния вдоль окружности приходится одинаковое и достаточно большое число жителей). Цена килограмма рыбы исторически сложилась на определенном уровне, она достаточно высока, чтобы окупать усилия и снасти рыбаков, никто из них не считает уместным ее менять. Каждый рыбак ловит достаточно много рыбы, чтобы хватило любому количеству потребителей.



Каждый местный житель потребляет по 1 килограмму рыбы в день, покупая ее у ближайшего из трех рыбаков (по расстоянию, которое нужно проделать по окружности). Если расстояние от потребителя до двух ближайших рыбаков одинаково, то он принимает решение произвольным образом (этим потребителем можно пренебречь).

Рыбаки, таким образом, конкурируют за потребителей, и каждый из них хочет выбрать свое расположение на берегу озера так, чтобы максимизировать выручку. Два или три рыбака могут выбрать одну и ту же точку для продажи, в таком случае они будут делить выручку на равные части.

По итогам каждого дня каждый рыбак оценивает объем продаж за день и следующим образом принимает решение, где организовать продажи на следующий день:

- Если его сегодняшнее положение принесло ему максимальную дневную выручку среди всех вариантов его размещения (с учетом фактического положения двух других), то на следующий день он остается в той же точке.
- Если условие предыдущего пункта не выполнено, он выбирает какую-то другую точку, в которой при текущем расположении других рыбаков его выручка была бы больше.

По прошествии нескольких дней все рыбаки решили больше никуда не двигаться и навсегда остались в некоторых точках[2]. Опишите их все возможные финальные расположения через ограничения на параметры x, y, z (расстояния между рыбаками). Считайте, что длина окружности $x + y + z = 1$.

Решение

Заметим, что если рыбак находится на дуге длины l, то он получает долю рынка $\frac{l}{2}$, деля пополам с соседом (соседями, если два других рыбака располагаются в одной точке) дугу слева и деля пополам с соседом (соседями) дугу справа от себя. Далее рассмотрим несколько случаев взаимного расположения рыбаков.

[2] Такое расположение является *равновесием Нэша* в этой задаче.

Случай 1: все три рыбака находятся в одной точке. В этом случае каждый рыбак получает треть рынка. Если Борис сместится в другую точку, то получит половину рынка. Следовательно, это не равновесие **(+1 балл)**.

Случай 2: два рыбака находятся в одной точке (A), третий – в другой (B). В этом случае рыбак, находящийся в точке B, получает половину рынка, а каждый из рыбаков, занявших точку A, будет продавать рыбу четверти от всех потребителей.

Случай 2a: точки A и B находятся не на одном диаметре. В этом случае длина одной из двух дуг AB больше половины длины окружности, а ее половина – больше четверти длины окружности. Следовательно, любому из рыбаков, находящихся в точке A, выгодно сместиться в любую внутреннюю точку большей дуги AB – это позволит продавать рыбу более чем четверти потребителей. Поэтому рассматриваемое расположение рыбаков не является равновесием **(+1 балл)**.

Случай 2b: точки A и B находятся на одном диаметре. Докажем, что такая расстановка рыбаков является равновесием.

Рыбаку из точки B невыгодно переместиться в точку A – тогда он уменьшит свою долю до 1/3. Любое другое изменение положения рыбаком из точки B сохранит за ним половину всего рынка. Таким образом, у этого рыбака нет возможности увеличить свою долю рынка **(+1 балл)**.

Рыбак из точки A, переместившись в точку B, сохранит за собой четверть рынка. Перемещение на любую внутреннюю точку дуги AB позволит рыбаку получить половину от половины рынка, то есть четверть всего рынка. Значит, рыбакам из точки A изменять свое положение нет смысла, а все ситуации, описываемые случаем 2b:

$$x = 0, y = z = \frac{1}{2};\quad y = 0, x = z = \frac{1}{2};\quad z = 0, x = y = \frac{1}{2}, \tag{4.1}$$

являются равновесными **(+1 балл)**.

Случай 3: все три рыбака находятся в разных точках ($x,y,z > 0$). В этом случае Евгений получает долю рынка $\frac{x}{2} + \frac{y}{2}$, Борис – $\frac{x}{2} + \frac{z}{2}$, Максим – $\frac{y}{2} + \frac{z}{2}$.

Заметим, что любое отклонение рыбака по той же самой дуге, ограниченной двумя другими рыбаками, не приведет к изменению его доли рынка: в любой точке дуги он забирает потребителей с половины этой дуги, а длина такой дуги зафиксирована положениями двух других рыбаков **(+2 балла)**.

Отклонение в точку, занимаемую другим рыбаком, приведет к получению $\frac{1}{4}$ от всей доли рынка. Для того, чтобы такое отклонение было невыгодным ни одному из рыбаков, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \geqslant \frac{1}{4} \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{2} \geqslant \frac{1}{4} \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \geqslant \frac{1}{4} \end{cases} \tag{4.2}$$

или

$$\begin{cases} x + y \geqslant \frac{1}{2} \\ x + z \geqslant \frac{1}{2} \\ y + z \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (4.3)$$

или

$$\begin{cases} z \leqslant \frac{1}{2} \\ y \leqslant \frac{1}{2} \\ x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (4.4)$$

(+2 балла).

Наконец, последнее возможное отклонение рыбака – на противоположную дугу. Тогда Евгений сможет плучить $\frac{z}{2}$, Борис – $\frac{y}{2}$, а Максим – $\frac{x}{2}$. Чтобы ни одному из рыбаков не было выгодно отклоняться, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \geqslant \frac{z}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{2} \geqslant \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \geqslant \frac{x}{2} \end{cases} \qquad (4.5)$$

или

$$\begin{cases} x + y \geqslant z \\ x + z \geqslant y \\ y + z \geqslant x \end{cases} \qquad (4.6)$$

или

$$\begin{cases} z \leqslant \frac{1}{2} \\ y \leqslant \frac{1}{2} \\ x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (4.7)$$

(+4 балла).

Объединив любую из систем (4.2)-(4.4) с любой из систем (4.5)-(4.7) и вспомнив ограничение случая 3 ($x, y, z > 0$), получим окончательное описание множества равновесий в этом случае:

$$\begin{cases} 0 < z \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 < y \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (4.8)$$

Итоговый ответ в задаче описывается объединением множеств (4.1) и (4.9). Несложно видеть, что это множество совпадает со множеством

$$\begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (4.9)$$

Схема проверки

Основные этапы решения задачи оценивались в соответствии с разбалловкой в решении.

Вычитался 1 балл, если в ответе оставались строгие неравенства вместо нестрогих.

Вычитался 1 балл, если в случае общего положения система была выписана правильно, но при ее решении была допущена арифметическая ошибка, несущественно повлиявшая на итоговый ответ.

Задача 5. *Рынок заемных средств* *(12 баллов)*

На рынке заемных средств страны Альфа предложение формируется домашними хозяйствами, величина сбережений которых зависит от ставки процента: $S(r) = 1800r$, где r — годовая ставка процента в долях. Спрос на заемные средства могут формировать только пять компаний, каждая из которых планирует реализовать инвестиционный проект сроком в один год (во всех случаях издержки возникают вначале года, а доход от реализации проекта — в конце года). Собственные средства для инвестиций компании не используют. Данные о планируемых издержках и доходах этих компаний представлены в таблице.

Компания	Издержки	Доход
A	100	110
C	200	240
D	300	390
E	100	135
F	50	100

Ставка процента в стране Альфа регулируется центральным банком (других инструментов у центрального банка нет), и его цель состоит в том, чтобы максимизировать объем инвестиций, осуществляемых в экономике.

а) *(5 баллов)* Какие компании захотят реализовывать инвестиционные проекты, если годовая ставка процента равна 33 % ($r = 0{,}33$)?

б) *(7 баллов)* Один политик высказался, что для достижения максимального уровня инвестиций центральному банку страны Альфа давно пора снизить процентную ставку до нуля. Согласны ли вы с этим утверждением? Если да, объясните. Если нет, найдите ставку процента, которая обеспечит наибольший уровень инвестиций.

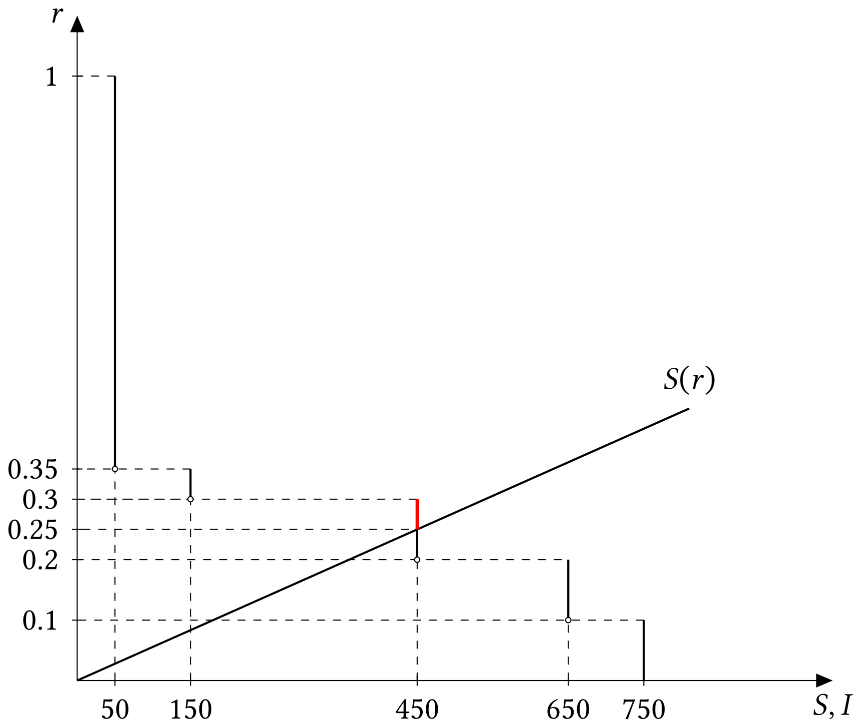
Решение

а) Посчитаем прибыльность каждого проекта, разделив доход на издержки и вычтя единицу. И сравним со ставкой процента. В тех проектах, где доходность больше или равна ставке процента, проект реализовывать выгодно.

Компания	Издержки	Доход	Прибыльность	Будет ли реализован
A	100	110	0,1	нет
C	200	240	0,2	нет
D	300	390	0,3	нет
E	100	135	0,35	да
F	50	100	1	да

б) Нет, политик не прав. Если снизить ставку до 0, то предложение заёмных средств тоже снизится до нуля, проекты будет не на что реализовывать, уровень инвестиций в таком случае тоже будет нулевым.

Теперь посчитаем оптимальную ставку процента. Для наиболее полного понимания, приведём графическое решение. Заметим, что уровень интестиций — это затраты, которые требуются фирмам для реализации проекта. Так, если проект реализует только фирма F, то уровень инвестиций примет значение 50. Если фирма F и E, то 150 (добавили 100 денежных единиц). Также заметим, что функция инвестиций в стране невозрастающая, причём рост будет происходить в момент, когда для очередной фирмы проект будет становиться рентабельным (важно заметить, что компания будет реализовывать проект при нулевой прибыли, это соотвествует стандартным микро- и макроэкономическим моделям). Объединяя все эти пункты, получаем следующий график:



Видно, что сбережения сравняются с инвестициями в точке, где $r = 0{,}25$. Если процентная ставка опустится ниже 0,25, то величины сбережений в экономике будет не хватать для достижения максимально возможного уровня инвестиций. Однако важно так же заметить, что при ставке процента $r \in [0{,}25; 0{,}3]$ уровень инвестиций будет находиться на одном уровне (так как новые фирмы не придут). Следовательно, любая ставка r в этом промежутке ведёт к максимальному уровню инвестиций в экономике данной страны.

Примечание. Выколотые точки на графике поставлены так, что фирма при безразличии осуществляет инвестиции. Для решения эта предпосылка необязательна.

Схема проверки

а) по 1 баллу за проверку каждого проекта и верный вывод по нему.

б) Баллы по этому пункту распределились следующим образом: 2 балла максимум можно было получить, ответив на вопрос о правоте/неправоте политика и 5 баллов за нахождение оптимальной ставки процента.

За ответ политика:

- 2 балла за верный ответ с обоснованием
- 1 балл за верный ответ и частично верное обоснование
- 0 баллов за неверный ответ и за ответ «нет» без обоснования или с полностью неверным обоснованием

За нахождение оптимальной ставки:

- Рассмотрены случаи для всех возможных значений r — 5 баллов

- Рассмотрены случаи для всех возможных значений r до достижения оптимальной ставки без обоснования, что далее увеличивать/уменьшать ставку не стоит — 3 балла
- Рассмотрены дискретные значения r с проверкой обеих границ ($r = 0$ и $r \geqslant 0{,}35$) — 3 балла
- Рассмотрены дискретные значения r с проверкой одной границы или без границ — 2 балла
- В ответе в итоге указали промежуток r от 0,2 до 0,3 (не проверили сумму инвестиций) — 2 балла
- Неверные рассуждения — 0 баллов
- Правильный ответ при неверном объяснении или отсутствии объяснения –– 0 баллов
- Рассмотрение менее 5 точек (без адекватного объяснения поведения инвестиций на границах) — 1 балл

Задача 6. *А спрос-то не линейный!* *(12 баллов)*

Фирма-монополист недавно начала работать на новом рынке и пока не знает точно кривую спроса на свой товар. Назначив в январе цену 20, она продала 3 единицы продукции. Назначив в феврале цену 5, она продала 48 единиц. Предположив, что месячный спрос на продукцию фирмы линейный, менеджер восстановил уравнение спроса по этим двум точкам, а затем назначил в марте цену, оптимальную для этой линейной кривой спроса. Функция издержек фирмы задается уравнением $TC(Q) = 3Q$.

В действительности же функция месячного спроса на этот товар не линейная, а обладает постоянной эластичностью. (Иными словами, спрос описывается уравнением $Q(P) = A/P^k$ для каких-то A и k, и эластичность спроса как раз постоянна и равна $-k$.) В марте фирма произвела и продала объем, фактически истребованный потребителями по назначенной фирмой цене. Определите, какую долю от максимально возможной прибыли недополучила фирма в марте из-за неверного предположения о линейности спроса.

Решение

Выведем функцию линейного спроса по двум точкам. Пусть спрос задается функцией $Q_d(p) = a - bP$. Например, составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3 = a - 20b, \\ 48 = a - 5b. \end{cases}$$

Решив ее, получаем $Q_d(p) = 63 - 3p$.

Определим, какую цену назначил менеджер в марте (оптимальную для ненастоящего линейного спроса). Составим функцию прибыли для этого спроса:

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = Q\,(21 - Q/3) - 3Q = 18Q - Q^2/3.$$

Оптимальный выпуск находится в вершине параболы, $Q^* = 18/(2/3) = 27$. Значит, оптимальная цена $p^* = 21 - 27/3 = 12$.

Заметим, что можно было сразу максимизировать прибыль по p. Действительно, $\pi(p) = Q\cdot(p-3) = (63-3p)(p-3) = 3(21-p)(p-3)$. Это парабола с ветвями вниз, вершина находится посередине между корнями. Значит, $p^* = (3 + 21)/2 = 12$, получили тот же ответ.

Далее найдем истинную функцию спроса по двум точкам. Для этого составим систему:

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{A}{20^k}; \\ 48 = \dfrac{A}{5^k} \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получаем $16 = 4^k$, откуда $k = 2$. Значит, $A = 1200$. Итак, настоящая функция спроса описывается уравнением

$$Q_d^{\text{истинн}}(p) = \frac{1200}{p^2}.$$

Менеджер назначил цену $p = 12$, значит, в марте потребители захотели купить $Q_d^{\text{истинн}}(12) = 1200/12^2 = 100/12 = 25/3$ единицы продукции. Фактическая прибыль фирмы составила $(12 - 3) \cdot 25/3 = 9 \cdot 25/3 = 75$.

Осталось рассчитать максимально возможную прибыль. Настоящая функция прибыли фирмы (от p), имеет вид

$$\pi^{\text{истинн}}(p) = Q_d^{\text{истинн}}(p)(p-3) = \frac{1200}{p^2}(p-3) = 1200\left(\frac{1}{p} - \frac{3}{p^2}\right).$$

Сделав замену $t = 1/p$, получаем параболу с ветвями вниз

$$\pi^{\text{истинн}}(t) = 1200(t - 3t^2).$$

Оптимальное t находится в вершине: $t^* = 1/6$, откуда $p^* = 1/(1/6) = 6$. Фирме для максимизации прибыли нужно было назначить цену 6, а не 12.

Также эту цену можно было найти из формулы индекса Лернера: $\frac{p^*-MC}{p^*} = \frac{1}{|E|}$. У нас $MC = 3$, $|E| = k = 2$, откуда $p^* = 6$.

Кроме того, можно было максимизировать прибыль по Q: $\pi^{\text{истинн}}(Q) = Q \cdot \sqrt{1200}/\sqrt{Q} - 3Q = \sqrt{1200Q} - 3Q$. После замены $t = \sqrt{Q}$, получаем параболу с ветвями вниз $\sqrt{1200}t - 3t^2$. Ее вершина $t^* = \sqrt{1200}/6$, значит, $Q^* = (t^*)^2 = 1200/36 = 100/3$.

Максимально возможная прибыль равна $(100/3) \cdot (6 - 3) = 100$. Значит, фирма потеряла из-за неверного предположения о линейности спроса (и, как следствие, неправильного ценообразования) $(100 - 75)/100 \cdot 100\% = 25\%$ прибыли.

Ответ: 25%.

Схема проверки

- Вывод функции линейного спроса по двум точкам — **2 балла**.
- Определение уровень оптимального спроса и цены в соответствии с линейным спросом — **2 балла**.
- Вывод истинной (нелинейной) функции спроса — **2 балла**.
- Расчет фактической прибыли при = 12 — **2 балла**.
- Определение оптимального объема производства для истинной функции спроса — **2 балла**.
- Расчет максимальной прибыли — **1 балл**.
- Расчет доли недополученной прибыли от максимально возможной — **1 балл**.

Типичные ошибки:

1. Не всем удавалось вывести формулу нелинейной функции спроса монополиста.
2. Неправильный расчет фактической прибыли: для расчета использовали не цену, а количество продукции при линейном спросе.

Задача 7. *Люди и роботы: кто кого?* *(12 баллов)*

В XXI веке ускорились темпы автоматизации производства, то есть замены труда людей капиталом — в основном, промышленными роботами. Неудивителен рост беспокойства по поводу того, что машины могут полностью заменить людей. В данной задаче мы рассмотрим модель, проливающую свет на этот феномен.

Рассмотрим фирму, производственная функция которой имеет вид

$$Q = \sqrt{L_1 + a \cdot R},$$

где Q — объем производства товара, L_1 — объем *неквалифицированного* труда людей (труда рабочих), R — объем труда роботов, $a \geqslant 0$ — параметр, характеризующий производительность роботов. Фирма закупает неквалифицированный труд людей и труд роботов на конкурентном рынке по одинаковой цене, равной 1. При безразличии фирма использует для производства труд роботов, а не людей.

Цена товара фирмы P не зависит произведенного количества товара, но зависит от его качества z: $P(z) = 4z$. Качество товара тем выше, чем больше инженеров, дизайнеров и других *квалифицированных* сотрудников наймет фирма. А именно, $z = \sqrt[4]{L_2}$, где L_2 — объем квалифицированного труда людей. Цена единицы квалифицированного труда людей фиксирована и равна 2.

а) *(1 балл)* При каких значениях a фирма будет использовать труд роботов?

б) *(3 балла)* Допустим, качество товара фиксировано на определенном уровне $z \geqslant 0$. Определите оптимальный для фирмы объем производства как функцию от z и a. Определите, какой объем L_1 будет нанимать фирма как функцию от z и a.

в) *(3 балла)* Определите, какое качество $z^\star$ будет выбирать фирма как функцию от a.

г) *(2 балла)* Определите величину *суммарного* спроса фирмы на труд людей как функцию от a.

д) *(3 балла)* В XXI веке значение параметра a быстро растет. Допустим, a_1 и a_2 таковы, что при росте производительности роботов с a_1 до a_2 фирма увольняет неквалифицированных работников. Верно ли, что при этом величина *суммарного* спроса фирмы на труд людей тоже сократится? Если нет, приведите этому содержательное экономическое объяснение.

Решение

а) Как видно из функции, a единиц труда неквалифицированных работников и единица труда роботов *взаимозаменяемы* — при вычитании одного и добавлении другого выпуск всегда остается неизменным. Следовательно, если a единиц L_1 стоят дороже единицы R, неквалифицированный труд использовать не нужно. Затраты на единицу каждого из этих ресурсов равны 1, так что труд роботов выгоднее использовать при $a > 1$, а при $a = 1$ — безразлично. Согласно условию, в последнем случае фирма тоже выберет роботов, то есть $a \geqslant 1$ — ответ на вопрос пункта.

То же самое можно показать через предельные продукты ресурсов:

$$MP_{L_1} = \frac{1}{2 \cdot (L_1 + a \cdot R)} > \frac{a}{2 \cdot (L_1 + a \cdot R)} = MP_R.$$

Значение первой дроби меньше при $a < 1$, следовательно, при этом условии каждый дополнительный робот производит меньше, чем работник, при одинаковых издержках.

б) В случае $\underline{a \geqslant 1}$ используются роботы, а неквалифицированный труд не используется, то есть $L_1 = 0$. Прибыль при этом равна $\pi = 4zQ - R$ (пренебрегаем фиксированными издержками на L_2). Максимум этой функции можно искать разными способами: через производную, через условие равенства предельных величин или через преобразования в квадратичную параболу. Воспользуемся последним способом и заменим $R = Q^2/a$:

$$\pi = 4zQ - \frac{Q^2}{a}.$$

Относительно Q это квадратичная парабола с ветвями вниз, ее максимум в точке $Q = 2az$.

В случае $\underline{a < 1}$ роботы не используются и производственная функция принимает вид $Q = \sqrt{L_1}$, то есть $L_1 = Q^2$. Запишем функцию прибыли (снова не учитываем фиксированные издержки):

$$\pi = 4zQ - Q^2.$$

Относительно Q это тоже квадратичная парабола с ветвями вниз, ее максимум в точке $Q = 2z$. Отсюда $L_1 = Q^2 = 4z^2$.

В итоге получаем:

$$Q(a,z) = \begin{cases} 2z, & a < 1 \\ 2az, & a \geqslant 1 \end{cases} \qquad L_1(a,z) = \begin{cases} 4z^2, & a < 1 \\ 0, & a \geqslant 1 \end{cases} \qquad R(a,z) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ 4az^2, & a \geqslant 1 \end{cases}$$

В вопросе пункта спрашивались только Q и L_1; функция R выписана, так как она пригодится в дальнейшем.

в) Теперь z является переменой величиной, а значит и издержки L_2 становятся переменными. Их величина равна $2L_2 = 2z^4$. Воспользовавшись результатами предыдущего пункта, составим функцию прибыли:

$$\pi = \begin{cases} 4z \cdot 2z - 4z^2 - 2z^4, & a < 1 \\ 4z \cdot 2az - 4az^2 - 2z^4, & a \geqslant 1. \end{cases}$$

Максимизировать эту функцию можно по-разному. Заменим $t = z^2$:

$$\pi = \begin{cases} 8t - 4t - 2t^2, & a < 1, \\ 8at - 4at - 2t^2, & a \geqslant 1. \end{cases}$$

Вершины парабол (с ветвями вниз) будут ответом на вопрос пункта:

$$z = \sqrt{t} = \begin{cases} 1, & a < 1 \\ \sqrt{a}, & a \geqslant 1. \end{cases}$$

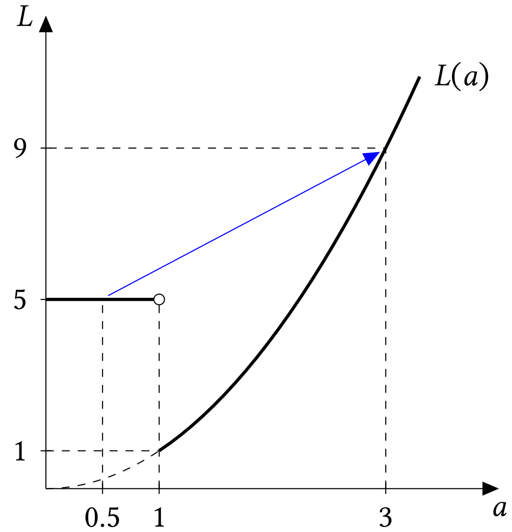
г) Согласно результату первого пункта и условию,

$$L_1(z) = \begin{cases} 4z^2, & a \geqslant 1 \\ 0, & a \geqslant 1 \end{cases} \qquad\qquad L_2(z) = z^4$$

Подставив сюда z, найденное в пункте **в)**, получим:

$$L_1(a) = \begin{cases} 4, & a < 1 \\ 0, & a \geqslant 1 \end{cases} \qquad L_2(a) = \begin{cases} 1, & a < 1 \\ a^2, & a \geqslant 1 \end{cases} \qquad L(a) = L_1(a) + L_2(a) = \begin{cases} 5, & a < 1 \\ a^2 & a \geqslant 1 \end{cases}$$

График последней функции в задаче не требовался, но для ответа на следующий вопрос он будет полезен:



д) Например, при росте a от 0,5 до 3 спрос на неквалифицированный труд снижается с 4 до 0, а общий спрс на труд растет с 5 до 9. Бóльшая производительность роботов увеличивает объемы производства, а значит, и стимулы инвестировать в качество (ведь выгоды от увеличения качества умножаются на большее количество). Это, в свою очередь, увеличивает спрос фирмы на квалифицированных сотрудников. Рост этого спроса при росте a может скомпенсировать падение спроса на неквалифицированных сотрудников, и суммарный спрос вырастет.

Также можно описать происходящее в терминах «субституты-комплементы». Неквалифицированный труд людей является субститутом к труду роботов, но квалифицированный труд людей является комплементом к нему (через взаимодействие количества и качества). При росте a растет спрос на роботов, и потому падает на субститут роботов (неквалифицированный труд людей) и растет на комплемент роботов (квалифицированный труд людей). Сумма двух последних эффектов может оказаться положительна.

Схема проверки

а) Определено условие $a \geqslant 1$ — *(1 балл)*

б) По 1 баллу за корректную постановку задачи и за нахождение каждой из функций. Если при нахождении функций один из двух случаев (интервалов a) игнорируется, ставится 1 балл вместо 2.

в) По 1 баллу за корректную постановку задачи, нахождение опитмума и верный ответ.

г) По 1 баллу за верное нахождение функций $L_2(a)$ и $L(a)$.

д) Пример случая, в котором утверждение неверно: *(*2 балла).

Экономическая интерпретация: *(1 балл)*

Задача 8. *Инвестиции с минимальным сожалением* (12 баллов)

Любой инвестор сталкивается с ситуацией, когда он жалеет о том, что вложил или не вложил деньги в определенный актив. Если стоимость актива растет, инвестор, не вложивший деньги в него, жалеет об этом; если же стоимость падает, сожаление испытывают инвесторы, вложившие деньги. Будущее неопределенно, и потому полностью избежать сожаления не удастся. Разные портфели активов, однако, характеризуются разным потенциальным сожалением. В этой задаче вам предлагается найти для нескольких примеров портфели активов, при которых потенциально возможное сожаление *минимально*.

Доходности	Сценарий 1	Сценарий 2
Акции Alset	+30 %	−10 %
Акции Drof	−20 %	+20 %

Представим себе инвестора, имеющего 1 млн руб. и рассматривающего инвестиции в два актива: акции компании Alset, производящей электромобили, и компании Drof, производящей бензиновые автомобили. Цены на акции этих фирм обычно движутся в противоположном направлении. В зависимости от ситуации на энергетических рынках может реализоваться Сценарий 1, при котором растут акции Alset, или Сценарий 2, при котором растут акции Drof. Таблица возможных доходностей приведена справа. (Например, в Сценарии 1 цена акций Alset вырастет на 30 %.) В момент вложения средств инвестор не знает, какой сценарий реализуется.

Определим *сожаление* как разницу между максимальной прибылью при определенном сценарии и фактической прибылью. Например, если инвестор вложит в акции двух компаний по 0,5 млн руб. и реализуется Сценарий 1, инвестор получит прибыль в размере $0{,}3 \cdot 0{,}5 + (-0{,}2) \cdot 0{,}5 = 0{,}05$ млн руб, в то время как максимальная прибыль при данном сценарии равна $0{,}3 \cdot 1 = 0{,}3$ (все надо было вкладывать в Alset). Сожаление инвестора будет равно $0{,}3 - 0{,}05 = 0{,}25$ млн руб. Если же реализуется Сценарий 2, сожаление инвестора будет равно $0{,}2 \cdot 1 - (0{,}2 \cdot 0{,}5 + (-0{,}1) \cdot 0{,}5) = 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}15$ млн руб. Максимально возможное (по всем сценариям) сожаление инвестора при равном вложении средств будет равно $\max(0{,}25; 0{,}15) = 0{,}25$ млн руб.

а) *(4 балла)* Допустим, инвестор вкладывает в акции всю сумму. Определите, какую долю средств ему следует вложить в Alset, чтобы минимизировать максимально возможное в будущем сожаление.

б) *(3 балла)* Инвестор по-прежнему вкладывает всю сумму, но теперь есть Сценарий 3, при котором происходит кризис и акции обеих компаний падают в цене:

Доходности	Сценарий 1	Сценарий 2	Сценарий 3
Акции Alset	+30 %	−10 %	−30 %
Акции Drof	−20 %	+20 %	−20 %

Определите, какую долю средств ему следует вложить в Alset, чтобы минимизировать максимально возможное в будущем сожаление.

в) *(5 баллов)* Предположим, что в условиях пункта **б)** инвестор может не вкладывать часть денег в акции. Невложенные средства приносят доходность 0 % при любом сценарии. Определите, какие доли средств инвестору следует вложить в Alset и Drof, чтобы минимизировать максимально возможное в будущем сожаление.

Решение

а) Пусть x — доля средств, вкладываемых в Alset. Если реализуется Сценарий 1, сожаление будет равно $0{,}3 - (0{,}3x - 0{,}2(1-x)) = 0{,}5 - 0{,}5x$. Если реализуется Сценарий 2, сожаление будет равно $0{,}2 - (-0{,}1x + 0{,}2(1-x)) = 0{,}3x$. Значит, максимальное сожаление равно

$$R_1(x) = \max\{0{,}5 - 0{,}5x; 0{,}3x\}.$$

$0{,}5 - 0{,}5 = 0{,}3x$ при $x = 5/8$, так что функцию сожаления можно переписать как

$$R_1(x) = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5x, & x < 5/8; \\ 0{,}3x, & x \geqslant 5/8. \end{cases}.$$

$R_1(x)$ убывает при $x < 5/8$ и растет при $x > 5/8$, значит, точкой минимума является $x^* = 5/8$.

б) При третьем сценарии сожаление будет равно $-0{,}2 - (-0{,}3x - 0{,}2(1-x)) = 0{,}1x$. Значит, максимальное сожаление равно

$$R_2(x) = \max\{0{,}5 - 0{,}5; 0{,}3x; 0{,}1x\}.$$

Заметим, что при всех x $0{,}3x \geqslant 0{,}1x$ (сожаление при втором сценарии больше, чем при третьем), так что $R_2(x) = R_1(x)$. Значит, и оптимальное значение x то же, $x^* = 5/8$.

в) Пусть x и y — доли средств, вкладываемые в акции Alset и Drof соответственно, $x+y \leqslant 1$, тогда $1-x-y$ не вкладываются никуда. При первом сценарии сожаление будет равно $0{,}3 - (0{,}3x - 0{,}2y)$, при втором $0{,}2 - (-0{,}1x + 0{,}2y)$, при третьем $0 - (-0{,}3x - 0{,}2y)$ (так как максимальная прибыль при третьем сценарии равна 0, инвестор сожалеет, что вообще вкладывал в акции). Тогда максимальное сожаление равно

$$R(x,y) = \max\{0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y; 0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y; 0{,}3x + 0{,}2y\}.$$

Нам нужно минимизировать эту функцию по x,y при ограничениях $x,y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$.

Дальше двигаться можно несколькими способами.

Способ 1. (Догадка + обоснование)

По аналогии с пунктом а), предположим, что минимальное сожаление достигается тогда, когда сожаление одинаково при всех сценариях. Это происходит при x и y, удовлетворяющих равенствам

$$0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y = 0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y = 0{,}3x + 0{,}2y.$$

Решая эту систему, получаем $x = 0{,}5$, $y = 0{,}25$.

Сожаление при $(x,y) = (0{,}5{,}0{,}25)$ равно $R(0{,}5{,}0{,}25) = \max\{0{,}2; 0{,}2; 0{,}2\} = 0{,}2$.

Докажем, что это действительно минимально возможное сожаление, то есть для всех $x,y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$, $R(x,y) \geqslant 0{,}2$.

Предположим противное. Тогда существуют некие x_0,y_0, такие что $R(x_0,y_0) < 0{,}2$. Тогда, поскольку R равно наибольшему из трех сожалений, сожаление *при каждом сценарии* должно быть меньше 0,2. Но тогда

$$\begin{cases} 0{,}3 - 0{,}3x_0 + 0{,}2y_0 < 0{,}2; \\ 0{,}2 + 0{,}1x_0 - 0{,}2y_0 < 0{,}2; \\ 0{,}3x_0 + 0{,}2y_0 < 0{,}2 \end{cases}$$

Складывая первые два неравенства, получаем $0{,}5-0{,}2x_0 < 0{,}4$, откуда $x_0 > 0{,}5$. Складывая вторые два неравенства, получаем $0{,}4x_0 < 0{,}2$, откуда $x_0 < 0{,}5$. Противоречие.

Значит, минимально возможное сожаление действительно равно 0,2 и достигается при $x^* = 0{,}5$, $y^* = 0{,}25$.

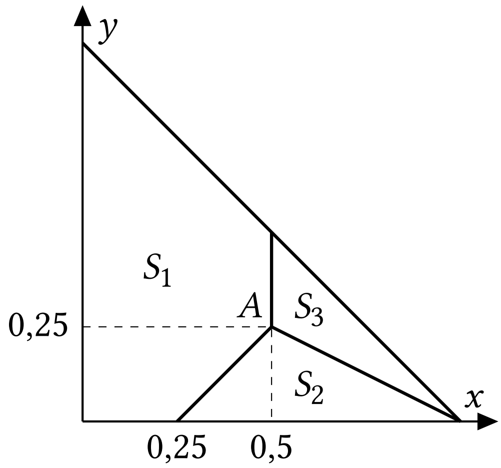
Способ 2. (Прямой анализ)

Обозначим за S множество всех возможных портфелей (x,y), то есть $S = \{(x,y) : x,y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$. Это треугольник с вершинами в точках (0,0), (0,1), (1,0).

Для каждого сценария $i = 1,2,3$ найдем такое подмножество множества портфелей S, что максимальное сожаление достигается при сценарии i. Обозначим эти подмножества за S_i.

Тогда S_1 определяется неравенствами $0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y \geqslant 0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y$, $0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y \geqslant 0{,}3x + 0{,}2y$; S_2 определяется неравенствами $0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y \geqslant 0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y$, $0{,}2+0{,}1x-0{,}2y \geqslant 0{,}3x+0{,}2y$; S_2 определяется неравенствами $0{,}3x+0{,}2y \geqslant 0{,}3-0{,}3x+0{,}2y$, $0{,}3x + 0{,}2y \geqslant 0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y$.

Изобразим эти множества на графике.



Общая граница S_1 и S_2 определяется равенством сожалений при сценариях 1 и 2, то есть равенством $0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y = 0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y$, что эквивалентно $y = x - 0{,}25$. Аналогичным образом получаем, что общая граница S_2 и S_3 описывается уравнением $y = 0{,}5 - 0{,}5x$; общая граница S_1 и S_3 задается уравнением $x = 0{,}5$. Общая точка трех множеств $A(0{,}5; 0{,}25)$ определяется равенством всех сожалений.

Тогда разобьем минимизацию $R(x,y)$ на два этапа: 1) проминимизируем сожаление на каждом из множеств S_1, S_2, S_3, получим три оптимальные точки; 2) из трех полученных точек выберем ту, в которой сожаление наименьшее.

Этап 1.

На множестве S_1 (максимальное) сожаление равно $0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y$. Будем минимизировать его графически. Для этого рассмотрим семейство «кривых безразличия», то есть линий, на которых сожаление одинаково. Они описываются уравнениями

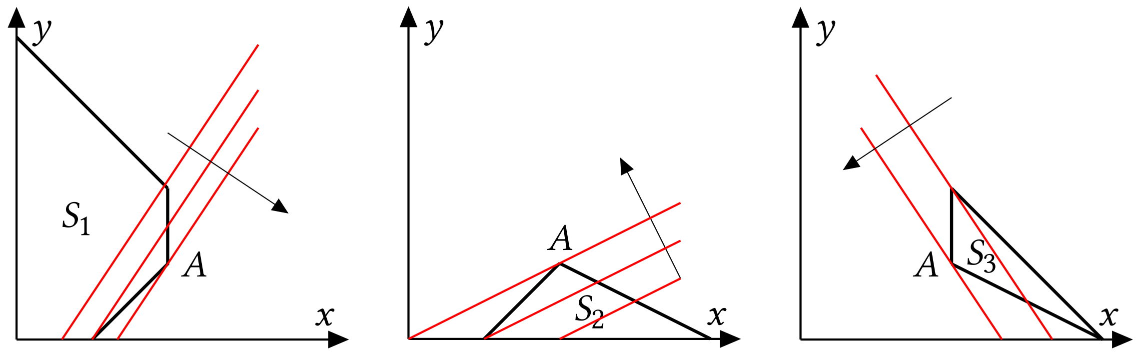


Рис. 8.1: Минимизация сожаления на каждом из множеств S_i графическим методом. Стрелки показывают направление убывания сожаления.

$0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y = R$, где R — константа, откуда $y = 1{,}5x + C$, где C — константа. Семейство этих линий изображено красным цветом на рис. 8.1 слева. Сожаление $0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y$ возрастает по x и убывает по y, и значит, оно будет падать при движении вправо-вниз. Стелка показывает направление убывания сожаления. Видно, что минимум достигается в точке A. (Здесь критически важно то, что наклон кривых безразличия меньше, чем наклон возрастающего участка границы множества S_1.)

Аналогичным образом с помощью графического метода находим, что минимум сожаления на каждом из множеств S_2, S_3 достигается в точке A (см. рис. 8.1, в центре и справа). Обратите внимание, что на разных графиках рис. 8.1 кривые безразличия разные, так как сожаление задается разными формулами на разных множествах.

Этап 2. На первом этапе мы получили, что минимум на каждом из множеств S_i достигается в одной и той же точке — точке A. Значит, в точке A максимальное сожаление меньше, чем в любой другой точке «большого» треугольника S. Она и будет ответом.

Ответ: 50% в акции Alset и 25% в акции Drof.

Примечание: лабораторные исследования, проведенные экономистами и психологами, показывают, что зачастую в условиях неопределенности люди действительно ведут себя не так, чтобы максимизировать математическое ожидание полезности или прибыли, а чтобы минимизировать возможное сожаление. Минимизацией сожаления можно объяснить покупку людьми лотерейных билетов (их покупают, чтобы потом не жалеть о том, что не купили), чрезмерно высокие по сравнению с предсказаниями стандартной теории игр ставки в аукционах, и другие явления. Что же касается поведения инвесторов, то красноречивее всего о минимизации сожаления сказал Гарри Марковиц, Нобелевский лауреат по экономике 1990 года. Марковиц получил премию за создание теории оптимального портфеля, основанной на максимизации математического ожидания прибыли. Сам он при этом признавался, что в жизни не следовал своей теории, а минимизировал сожаление. Вот его слова[3]:

«Надо было рассчитать историческую ковариацию классов активов и провести эффективную границу [это он о своей теории]. *Вместо этого я представил себе свое горе,*

[3]Цитата из статьи «Too Proud to Stop: Regret in Dynamic Decisions» Филиппа Стрэка и Пола Виферса, *Journal of European Economic Association*, 2020.

если бы фондовый рынок поднялся, а я в него не вложился, или если бы он опустился, а все мои накопления были бы в нем. Моим намерением было свести к минимуму мое будущее сожаление, поэтому я разделил свои сбережения 50/50 между облигациями и акциями».

(Впрочем, может быть, это было шуткой.)

Схема проверки

а)
- Сожаление при первом сценарии $0{,}5 - 0{,}5x$ — **1 балл**.
- Сожаление при втором сценарии $0{,}3$ — **1 балл**.
- Доказательство, что минимум при равенстве — **1 балл**.
- Ответ $x = 5/8$ — **1 балл**.

б)
- Сожаление при третьем сценарии $0{,}1x$ — **1 балл**.
- Доказательство, что не повлияет на минимум (график или сравнение) — **1 балл**.
- Утверждение, что ответ не изменится — **1 балл**.

в)
- Сожаления для всех трех сценариев — **1 балл**. Если ошибка хотя бы в одном, то балл не ставится.
- Предположение о равенстве всех трех условий в точке минимума — **1 балл**.
- Нахождение ответа $x = 0{,}5$, $y = 0{,}25$ — **1 балл**.
- Доказательство, что это минимум — **2 балла**. Частичные баллы за неполное доказательство не ставятся.