XXVIII Межрегиональный экономический фестиваль школьников
«Сибириада. Шаг в мечту»
Олимпиада по экономике для учащихся 11-х классов 3.03.2021
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Задания с решениями и критериями оценивания

Задача 1. Цена безработицы. 20 баллов

В прошлом году в стране Тутнездесь 60% трудоспособного населения не являлось экономически активным, а имели работу 37% трудоспособного населения. В этом году безработными числятся 6% трудоспособного населения.

1) Как и на сколько процентов изменился фактический ВВП в этом году по сравнению с прошлым, если известно, что численность экономически активного и трудоспособного населения не менялась, естественный уровень безработицы был равен 5%, а рост фактического уровня безработицы на 1 процентный пункт увеличивает отклонение ВВП от потенциального уровня на 2,5 %?

2) Чему была равна инфляция в этом году, если скорость обращения денег и денежная масса в обращении в стране не изменились?

Решение:

1) Определим уровень безработицы в прошлом и текущем году. Уровень безработицы определяется по формуле:

$$u = \frac{U}{E+U} \cdot 100\% = \frac{U}{EAP} \cdot 100\%$$

где U – число безработных, E – число занятых, EAP – численность экономически активного населения. При этом численность трудоспособного населения определяется следующим образом: $N = EAP + EPP = U + E + EPP$, где EPP – число экономически неактивного населения, N – численность трудоспособного населения. Поэтому в прошлом году $EAP = (1-0{,}6)N = 0.4N$, $U = (1 - 0.6 - 0.37)N = 0.03N$. Следовательно, в прошлом году уровень безработицы был равен 7,5%, а в текущем 15%:

$$u_0 = \frac{0.03N}{0.4N} \cdot 100\% = 0{,}075 \quad \textbf{(3 балла)}$$

$$u_1 = \frac{0.06N}{0.4N} \cdot 100\% = 0.15 \quad \textbf{(3 балла)}$$

Если уровень безработицы равен естественному, то фактический ВВП совпадает с потенциальным. В прошлом году безработица превышала естественный уровень на 2,5 п.п., следовательно, фактический ВВП отставал от потенциального на 2,5·2,5=6,25% или иначе $Y_0 = 0.9375Y^*$ (Y – фактический ВВП, Y^* - потенциальный ВВП). **(3 балла)**

В текущем году безработица превышала естественный уровень на 10 п.п., следовательно фактический ВВП отставал от потенциального на 2,5·10=25% или иначе $Y_1 = 0.75Y^*$ **(3 балла)**

Таким образом, ВВП изменился на $\left(\frac{Y_1}{Y_0} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{0.75Y^*}{0.9375Y^*} - 1\right) \cdot 100\% = (0{,}8 - 1) \cdot 100\% = -20\%$ **(3 балла)**

Ответ: ВВП сократился на 20%

2) $MV = PY \ \rightarrow \ \frac{M_1}{M_0} \cdot \frac{V_1}{V_0} = \frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{Y_1}{Y_0}$. Так как $\frac{M_1}{M_0} = 1$ и $\frac{V_1}{V_0} = 1$ по условию, то $\frac{P_1}{P_0} = \frac{Y_0}{Y_1} = \frac{1}{0,8} = 1,25$

(5 баллов)

Ответ: инфляция составила 25%.

Задача 2. Прогулки на теплоходе. 20 баллов

Менеджер санатория «Сибирские зори» предложил на выходных организовать для отдыхающих прогулки-экскурсии на теплоходе по Оби и Обскому морю – в субботу прогулку «Мистическая Бердь», а в воскресенье прогулку «Шесть мостов Новосибирска». Он уже зафрахтовал для этого теплоход на 500 посадочных мест.

Изучение спроса отдыхающих на эти экскурсии показало, что спрос желающих прокатиться только в субботу описывается функцией Qс=300–3Рс, а спрос желающих прокатиться только в воскресенье функцией Qв=2000–8Рв, где Qс и Qв – это количество билетов на прогулки в субботу и воскресенье соответственно (в штуках), а Рс и Рв – это цены соответствующих билетов (в рублях).

1) Чтобы не запутаться менеджер предложил билеты на субботнюю прогулку сделать синими, а на воскресную – красными. Определите, какие цены на каждый тип билетов должен установить менеджер, чтобы получить максимальную выручку от их продажи. Сколько при этом будет продано билетов и каких?

2) Неожиданно оказалось, что из-за отмены двухдневной автобусной экскурсии в Белокуриху появилась третья категория желающих попасть на прогулки по Оби и Обскому морю. Однако эти отдыхающие единогласно высказали пожелание: либо им продают билеты сразу на две экскурсии, либо они предпочтут другой вид отдыха. Спрос этой категории отдыхающих описывается функцией Qо=1600–5Ро, где Qо – это количество билетов, дающих право сразу на две экскурсии (в штуках), а Ро – это цена такого билета (в рублях).

Учитывая появление новой категории желающих, менеджер думает пересмотреть ценовую политику и ввести еще один тип билетов – зеленые, которые дадут право отправиться сразу на обе экскурсии – и в субботу, и в воскресенье. (Все билеты именные, поэтому перепродажа их невозможна).

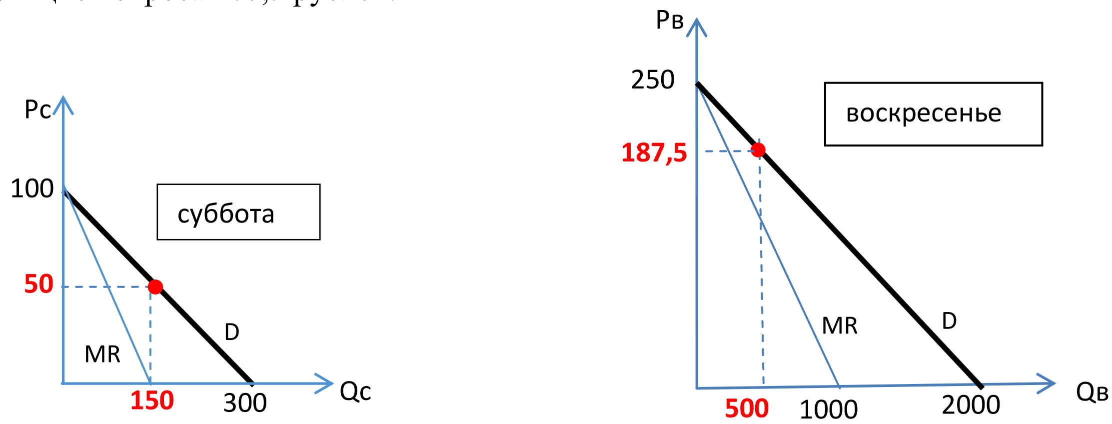
Определите, имеет ли смысл вводить новый тип билетов и если «да», то какие цены на каждый тип билетов теперь должен установить менеджер, чтобы получить максимальную выручку от их продажи. Сколько при этом будет продано билетов и каких?

Решение

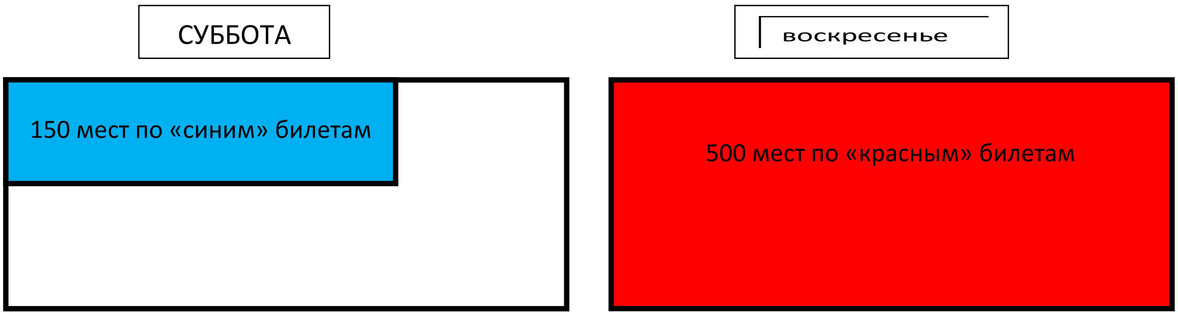
1) Решаем 2 стандартные задачи монополиста, максимизирующего выручку.

Для экскурсии в субботу предельный доход монополиста описывается функцией MRс=100-Qс/1,5. Максимум выручки монополист получит, если предельный доход окажется равен 0, т.е. когда Qс=150 билетов. При этом цену следует установить в соответствии с функцией спроса, т.е. Рс=50 рублей.

Для экскурсии в воскресенье предельный доход монополиста описывается функцией MRв=250-Qв/4. Предельный доход равен 0, если Qв=1000. Однако мест на теплоходе всего 500. Значит, будет продано всего 500 билетов. Цену на них следует назначить в соответствии с функцией спроса 187,5 рублей.



На рисунке схематично показано, как при этом будет заполнен теплоход в субботу и воскресенье.

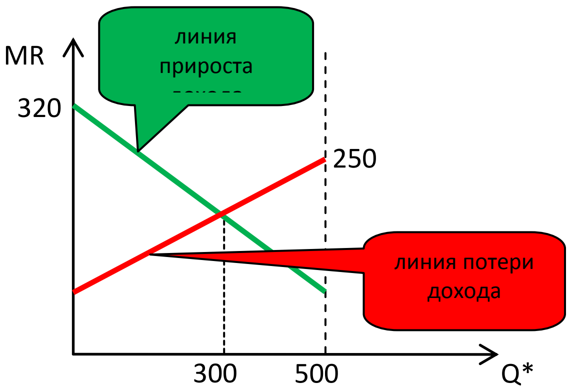


2) Воскресная прогулка пользуется повышенным спросом и, как показало решение 1), все места на теплоходе могут быть заняты теми, кто купит «красный» билет. Но можно, отказавшись продавать какое-то количество «красных» билетов, начать продавать «зеленые».

Увеличивать объем продаж «зеленых» билетов имеет смысл, пока прирост дохода от их продажи будет больше снижения дохода от сокращения объема продаж «красных» билетов. Учитывая, что предельный доход по «зеленым» билетам описывается функцией MRо=320-Qо/2,5 можно найти оптимальный объем такого замещения.

Пусть Q* - это количество «зеленых» билетов, которые замещают «красные» билеты. Тогда на долю «красных» остается (500-Q*) билетов. Увеличивать количество «зеленых» билетов будет выгодно, пока выполняется следующее соотношение 320-Q*/2,5>250-(500-Q*)/4. Решая это неравенство, получаем, что Q*<300. Значит больше 300 «зеленых» билетов продавать не следует.

Для наглядности покажем это на рисунке.

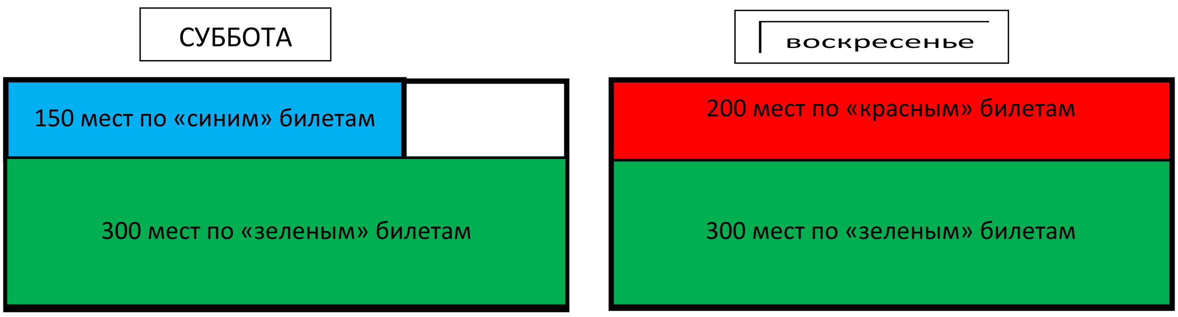


Однако «зеленые» билеты дают право на экскурсию и в субботу, поэтому следует проверить достаточно ли там свободных мест. Из пункта 1) мы знаем, что там оставалось еще 500-150=350 мест, а это более чем достаточно.

В соответствии с функциями спроса теперь для «красных» билетов следует установить цену (250-200/8)=225 рублей, для «зеленых» (320-300/5)=260 рублей, а для «синих» билетов цену оставить прежней - 50 рублей.

Итак, с учетом появления новой категории покупателей для получения максимальной выручки менеджеру следует продать 150 «синих» билетов по цене 50 рублей, 200 «красных билетов» по цене 225 рублей и 300 «зеленых» билетов по цене 260 рублей.

Заполненность теплоходов при этом окажется следующей.



Ответ

1) Максимум выручки может быть получен от продажи 150 «синих» билетов по цене 50 рублей и 500 «красных» билетов по цене 187,5 рублей.

2) Максимум выручки может быть получен от продажи 150 «синих» билетов по цене 50 рублей, 200 «красных» билетов по цене 225 рублей и 300 «зеленых» билетов по цене 260 рублей.

Примечание Задача придумана на основе идеи задачи «Организация лекций» https://iloveeconomics.ru/z/2505

Критерии

1) 5 баллов	Определение цены и оптимального количества «синих» билетов – 2 балла. Определение цены и оптимального количества «красных» билетов – 3 балла.
2) 15 баллов	За расчет и обоснование оптимального количества зеленых билетов – 10 баллов. Определение цены и оптимального количества «синих» билетов – 1 балл. Определение цены и оптимального количества «красных» билетов – 2 балла. Определение цены и оптимального количества «зеленых» билетов – 2 балла.

Задача 3. Производство противоугонных систем. 20 баллов

Крэбб и Гойл открыли предприятие по производству систем встроенной противоугонной сигнализации для скоростных метел. Их компания является пока единственным продавцом мётлосигнализаций на рынке. Издержки производства систем описываются функцией $TC = 8Q + 1.5Q^2$, (TC – общие издержки, десятков галлеонов, Q – количество произведенных противоугонных систем, десятков штук), а спрос – функцией $Q_D = 60 - 0.5P$ (Q – количество противоугонных систем, десятков шт. в месяц, P – цена, галлеонов).

В процессе производства половина мётлосигнализаций оказываются бракованными. Однако покупатели не могут при покупке отличить качественную мётлосигнализацию от бракованной и не знают, какая доля брака у производителей сигнализаций. Возвращать деньги или обменивать бракованную продукцию на качественную Крэбб и Гойл отказываются, поскольку их главная цель – получить максимум прибыли. Все произведенные за месяц сигнализации распродаются.

а) Определите, какую прибыль получают Крэбб и Гойл.

б) Под давлением возмущенных покупателей в дело вмешалось Министерство магической торговли и обязало недобросовестных продавцов возвращать деньги тем покупателям, которым достались бракованные мётлосигнализации (бракованные сигнализации при этом нужно вернуть продавцу). Насколько изменилась прибыль Крэбба и Гойла после вмешательства Министерства, если все покупатели обменивают бракованные сигнализации на деньги, а функция спроса осталась прежней? Учтите, что Крэбб и Гойл обменивают бракованные сигнализации на деньги только тем, кто их приобрел после вмешательства Министерства.

в) Оказалось, что бракованные мётлосигнализации тоже можно продать, но спрос на них он описывается функцией $Q_{Db} = 10 - 0.125P_b$, где Q_{Db}- количество бракованных сигнализаций (десятков штук в месяц), P_b - цена бракованной сигнализации (галлеонов). Крэбб и Гойл ввели систему тестирования качества изделий стоимостью 100 галлеонов, и стали предлагать бракованные сигнализации покупателям по сниженной цене. Насколько Крэббу и Гойлу удалось увеличить прибыль (по сравнению с п.2)?

Решение:

1. $\pi = (120 - 2Q) \cdot Q - 8Q - 1.5Q^2 \rightarrow max$

$MR = 120 - 4Q,\ MC = 8 + 3Q,\ MR = MC\ \rightarrow Q = 16, P = 88, \boldsymbol{\pi} = \mathbf{896}$ десятков галлеонов.

MC – возрастающая функция, а MR – убывающая функция, так что достаточное условие достижения максимума прибыли выполнено.

Критерии оценивания п.1 – <u>всего 3 балла</u>:

верное определение объема производства	1 балл
верное определение прибыли	2 балла

2. В данном случае продаются все противоугонные системы, но половину от общего произведённого количества Q возвращают. Тогда предприятие получает только половину выручки:

$$\pi = (120 - 2Q) \cdot Q \cdot 0{,}5 - 8Q - 1.5Q^2 = 52Q - 2{,}5 \cdot Q^2 \rightarrow max$$

Функция – прибыли – парабола, ветви которой направлены вниз. У нее один экстремум, который является максимумом. Чтобы найти его, достаточно приравнять первую производную к нулю: $52 - 5Q = 0\ \rightarrow Q = 10{,}4,\ P = 99{,}2$

$$\pi = 52 \cdot 10{,}4 - 2{,}5 \cdot 10{,}4^2 = 270{,}4$$

$$\Delta\pi = 270{,}4 - 896 = -625{,}6$$

Ответ: прибыль сократилась на 625,6 десятков галлеонов.

Критерии оценивания п.2 – <u>всего 7 баллов</u>:

Верная запись функции прибыли (или выручки)	3 балла
верное определение прибыли	3 балла
Верный ответ (изменение прибыли)	1 балл

3. Обратная функция спроса на бракованные системы $P_b = 80 - 8q_b$

Функция прибыли:

$$\pi = \left(120 - 2q_g\right)q_g + (80 - 8q_b)q_b - 8Q - 1.5Q^2 - 10 \rightarrow max$$

Для определения оптимума нужно перейти к одной переменной. Так как $q_g = q_b = q$, можно перейти либо к Q, заменив в записи выручки $q=0.5Q$, либо к Q, заменив в функции издержек $Q=2q$.

Рассмотрим первый переход:

$$\pi_1 = \left(120 - 2 \cdot \frac{Q}{2}\right) \cdot \frac{Q}{2} + \left(80 - 8 \cdot \frac{Q}{2}\right) \cdot \frac{Q}{2} - 8Q - 1.5Q^2 - 10 \rightarrow max$$

$$\pi = 92Q - 4Q^2 - 10 \rightarrow max$$

Это парабола, ветви которой направлены вниз, максимум достигается при $Q=11.5$.

Выручка от продажи бракованных сигнализаций

$$TR_b = \left(80 - 8 \cdot \frac{Q}{2}\right) \cdot \frac{Q}{2}$$

достигает максимума, когда $Q=10$, то есть $q=5$. Это значит, что более, чем 5 бракованных сигнализаций продавать нет смыла, поскольку это сократит выручку и, следовательно, прибыль. А в данном случае предполагается продажа $q=Q/2=10.5/2=5.75>5$. Поэтому верное решение: продавать 5 бракованных сигнализаций по $80 - 8 \cdot \frac{10}{2} = 40$ галлеонов, что принесет 200 дес. галлеонов. И найти максимум прибыли:

$$\pi_2 = \left(120 - 2 \cdot \frac{Q}{2}\right) \cdot \frac{Q}{2} + 200 - 8Q - 1.5Q^2 - 10 \rightarrow max$$

$$\pi_2 = 52Q - 2Q^2 - 190 \rightarrow max$$

То есть фактически корректная функция прибыли выглядит следующим образом:

$$\pi = \begin{cases} 92Q - 4Q^2, & Q \le 10 \\ 52Q - 2Q^2 + 190, & 10 < Q \le 60 \end{cases}$$

Приравняв производную π_2 к нулю (это парабола, ветви которых направлены вниз), получим $Q=13$ десятков систем. То есть будут продавать 6,5 десятков качественных противоугонных систем (по цене $P = 120 - 2 \cdot 6{,}5 = 107$ галлеонов) и 5 десятков бракованных (по цене $P = 80 - 8 \cdot 5 = 40$ галлеонов). Прибыль будет равна:

$$\pi = 6.5 \cdot 107 + 200 - 8 \cdot 13 - 1.5 \cdot 13^2 - 10 = 528$$

$$\Delta\pi = 528 - 270{,}4 = 257{,}6$$

Ответ: прибыль увеличится на 257,6 десятков галлеонов.

Критерии оценивания п.3:

Верная запись функции прибыли π_1 как функция одной переменной (Q или q)	**1 балл**
Верное определение объема продаж бракованных систем	**3 балла**
Верное определение объема производства	**3 балла**
Верное определение прибыли в том числе ее изменения	**3 балла** 1 балл

Задача 4. Автоматизированное производство. 20 баллов

Завод выпускает продукцию двух видов - ИКС и ИГРЕК. Для изготовления этих видов продукции используются уникальные роботы общим количеством М штук.

Производственные возможности каждого такого уникального робота описывается функцией:

$y_n = -x_n{}^2 - (2n - 2)x_n + (2n - 1)$,

где n – серийный номер робота (n =1,2,3…М),

x_n и y_n – количество ИКСов и ИГРЕКов в тоннах, соответственно, производимое роботом с серийным номером n за месяц.

1) Определите, какое максимальное количество ИКСов за месяц может произвести завод.

2) Определите, какое максимальное количество ИГРЕКов за месяц может произвести завод.

3) Запишите уравнение КПВ завода.

4) Известно, что рыночная цена тонны товара ИКС равна 180 тысяч рублей, а тонны товара ИГРЕК – 15 тысяч рублей. Всего на заводе имеется 10 роботов с серийными номерами от 1 до 10.

Рассчитайте, какую максимальную выручку от продажи готовой продукции сможет получить завод за месяц работы, и укажите какой вид продукции будет производить каждый робот.

Решение

1) Для максимизации производства товара ИКС все роботы должны будут производить только товар ИКС, т.е. $y_n = 0$ для всех n. Для удобства разложим уравнение КПВ робота на множители, сделав соответствующие преобразования:

$$y_n = -{x_n}^2 - 2nx_n + 2x_n + 2n - 1 \;\; \rightarrow$$

$$y_n = 2n(1 - x_n) + x_n(1 - x_n) - (1 - x_n) = (1 - x_n)(2n + x_n - 1)$$

$y_n = (1 - x_n)(2n + x_n - 1) = 0 \Rightarrow [1 - x_n = 0 \qquad 2n + x_n - 1 = 0 \;\Rightarrow [x_n = 1 \qquad x_n = 1 - 2n$

Легко заметить, что во втором уравнении при любом значении n мы получаем отрицательное значение для x_n, что невозможно. Поэтому из $y_n = 0$ следует, что $x_n = 1$ для любого значения n, т.е. максимальный уровень производства товара ИКС для всех роботов одинаков и равен 1тонне. Отсюда делаем вывод, что максимальный выпуск товара ИКС для всего завода равен количеству роботов, т.е. $X_{max} = M$ тонн.

2) При максимизации производства товара ИГРЕК, x_n будет равен нулю, т.е.

$y_{n\,max} = 2n - 1.$

Тогда $Y_{max} = \sum_{n=1}^{M} \quad (2n - 1) = M * \frac{1+2M-1}{2} = M^2$ (сумма арифметической прогрессии), т.е. $Y_{max} = M^2$ тонн.

3) Для построения общей КПВ завода необходимо выяснить как ведут себя альтернативные издержки производства товара X для каждого робота. Для этого возьмем производную функции производственных возможностей робота n по x_n:

$$\frac{dy_n}{dx_n} = -2x_n - 2n + 2$$

Видим, что с ростом n значение производной уменьшается, следовательно, альтернативные издержки производства X для каждого следующего по номеру робота растут. **Т.е. порядок переориентирования роботов на производство товара ИКС совпадает с серийными номерами роботов!!!**

Далее размещаем участки КПВ в порядке возрастания альтернативных издержек. Для этого график функции КПВ каждого робота нужно поднять по оси OY на константу равную максимальному производству товара ИГРЕК всеми последующими роботами или (что тоже самое) равную разности между максимальным выпуском товара ИГРЕК на заводе и максимальным выпуском товара ИГРЕК всеми роботами до рассматриваемого робота включительно. Т.е. для робота n эта константа будет равна:

$$M^2 - \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = M^2 - n^2$$

Также необходимо сместить данный график по оси OX вправо на n-1.

Итого, функции участка КПВ завода для каждого робота будут выглядеть следующим образом:

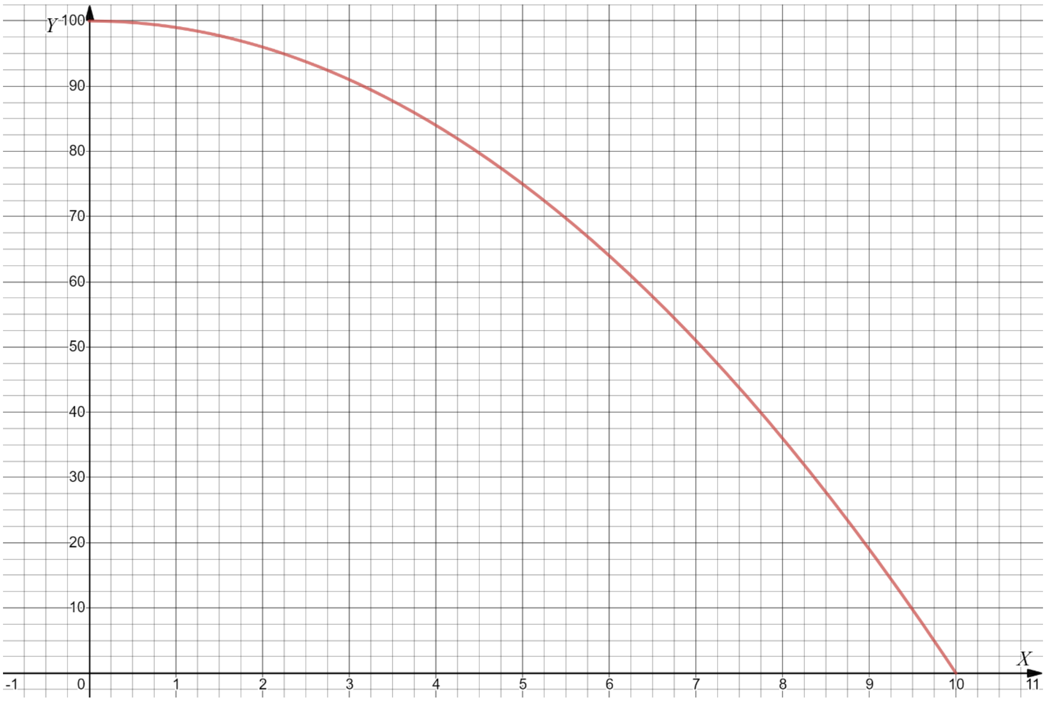
$$y_n{}^* = \left(1 - (x_n{}^* - n + 1)\right)(2n + x_n{}^* + (-n+1) - 1) + M^2 - n^2$$

$$y_n{}^* = (n - x_n{}^*)(n + x_n{}^*) + M^2 - n^2 = n^2 - (x_n{}^*)^2 + M^2 - n^2 = M^2 - (x_n{}^*)^2$$

при $x_n{}^* \epsilon [n-1; n]$

Нетрудно заметить, что все эти участки являются частями одной и той же функции, а именно $Y = M^2 - X^2$. Данная функция и будет задавать КПВ предприятия.

4) Подставим M=10 в функцию КПВ и получим: $Y = 100 - X^2$.



Функцию выручки завода можно записать следующим образом:

$$TR = P_y * Y + P_x * X = 15(100 - X^2) + 180X = -15X^2 + 180X - 1500$$

Это парабола, ветви которой обращены вниз, максимум будет в вершине. $X = \frac{180}{30} = 6 \Rightarrow Y = (100 - 36) = 64$. Подставляем эти значения в функцию выручки и получаем, что максимальная выручка завода за месяц работы составит

$TR = 6 * 180 + 64 * 15 = 2040$ тыс. рублей.

При этом роботы с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6 должны производить товар ИКС, а остальные роботы с номерами 7, 8, 9 и 10 должны производить товар ИГРЕК.

Ответ.

1) За месяц завод может произвести максимум M тонн ИКСов.

2) За месяц завод может произвести максимум M^2 тонн ИГРЕКов.

3) КПВ завода описывается функцией $Y = M^2 - X^2$.

4) Максимальная выручка завода за месяц работы составит 2040 тыс. рублей. При этом роботы с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6 будут производить товар ИКС, а роботы с номерами 7, 8, 9 и 10 товар ИГРЕК.

Критерии проверки:

1)	3 балла
2)	3 балла
3)	10 баллов
4)	4 балла

Задача 5. О мальчике Бобби, который любил деньги

С рождения Бобби пай-мальчиком был,
Имел Бобби хобби - он деньги любил,
Любил и копил.
Все дети, как дети - живут без забот,
А Боб на диете - не ест и не пьёт,
В копилку кладёт.
…

Здесь - пенни, там - шиллинг,
А где-нибудь - фунт!
Стал Бобби мошенник,
Мошенник и плут,
Скопил целый пуд!
Но в том-то и дело,что он не один,
Кто больше всех деньги на свете любил.
Он это забыл!

И вот в один ненастный день к Бобби пришли его 4 заклятых «друга» и сказали, что все, что он накопил – все 100 фунтов – нужно разделить на всех. Правда, как делить, «друзья» так и не смогли договориться. И тогда хитрый Бобби предложил такую схему. Кто-то из компании предлагает, как поделить деньги, и если за его предложение проголосует большинство, или голоса разделятся поровну (тот, кто предлагает – тоже голосует), то деньги делятся в соответствии с его предложением. Если же его предложение будет отвергнуто – его выгоняют, и он лишается возможности дальше участвовать в дележе денег. Тогда право выдвигать предложение переходит следующему по очереди, и вся процедура повторяется. При этом очередь, по которой будет передаваться право предлагать способ дележа, определяется до начала всех голосований и не меняется, пока не будет принят какой-то способ дележа денег. Каждый из четырех «друзей» подумал, что такая схема позволит ему прибрать к рукам большую часть суммы, и все вместе они решили, что первым выдвигать предложение будет Бобби. Очередь была установлена жеребьевкой.

Важно знать, что:

- никто из «друзей» Бобби не хочет, чтобы его выгнали;
- каждый из них хочет получить как можно больше денег;
- при прочих равных каждый из них предпочтет выгнать другого;
- Бобби и его «друзья» никому не доверяют и не умеют сговариваться;
- принимая решение как голосовать, и какое выдвигать предложение, каждый из друзей мыслить рационально.

Какой способ поделить деньги должен предложить Бобби, чтобы получить как можно больше фунтов?

Решение:

Задача решается с конца.

Если останется только один из «друзей», то он просто заберет себе 100 монет и игра закончится. Об этом знает «друг» №3 и просто предложит дележ 100-0 на чем игра закончится. «Друг» №2 знает об этом и «купит» голос «друга» №4 за 1 монету, предложив дележ 99-0-1, набрав 2 голоса против 1, так как «друг» №4 получает при таком раскладе хотя бы 1 монету. «Друг» №1 тоже знает об этом и предложит дележ 99-0-1-0, «купив» голос «друга» №3, так как при таком раскладе он получает больше 0 монет. Итоговый дележ, который предложит Бобби: 98-0-1-0-1.

Критерии проверки:

1) В решении предложена идея “подкупа” 2 игроков - 2 балла.
2) В решении предложена и реализована идея решения “с конца” - 5 баллов.
3) Сделан вывод, что Бобби получит 98 монет, а два друга по 1 (также принимается ответ, что Бобби получит (100-A-B) монет, один друг A, второй B, где A и B минимально возможные платежи) - 3 балла.
4) Полностью решенная задача - 20 баллов.
5) -1 балл, если участник не указал, что A = B.