Задача 1. «Полдники» *(30 баллов)*

Любимыми лакомствами жителей стран Кабаджленд и Бэриленд являются пирожки с капустой (P) и смородиновый морс (M). Эти блага потребляются в неизменной пропорции 1 пирожок на 1 стакан морса. Комплект, состоящий из одного пирожка и одного стакана морса, назовем *полдником.*

В любой стране для приготовления 1 пирожка необходимы 2 единицы муки (x) и 1 единица капусты (y), для приготовления стакана морса нужна только 1 единица смородины (z). Уравнения, описывающие кривые производственных возможностей относительно ресурсов, представлены в таблице. Найдите максимальное общее количество полдников, которое можно приготовить в двух странах, если:

Страна	Уравнение КПВ
Кабаджленд	$x_к + y_к + z_к = 120$
Бэриленд	$x_б + 2y_б + z_б = 120$

а) *(7 баллов)* обмен между странами невозможен;

б) *(8 баллов)* страны могут обмениваться пирожками и морсом;

в) *(15 баллов)* страны могут обмениваться пирожками, морсом и капустой.

Решение.

а) Обозначим за $P_к$ и $M_к$ объемы производства пирожков и морса в Кабаджленде. Из условия следует, что $x_к = 2P_к$, $y_к = P_к$, $z_к = M_к$. Подставляя эти соотношения в уравнение КПВ, получаем, что $3P_к + M_к = 120$ (Это не что иное, как уравнение КПВ Кабаджленда относительно товаров.) Второе уравнение на $P_к$ и $M_к$ получаем из условия о том, что полдник должен состоять из одного пирожка и одного стакана морса: $P_к = M_к$. Решая получившуюся систему, получаем, что $P_к = M_к = 30$.

2 балла за уравнение КПВ Кабаджленда относительно товаров

1 балл за нахождение количества полдников в Кабаджленде

Аналогично, $P_б$ и $M_б$ — объемы производства пирожков и морса в Бэриленде. Снова имеем соотношения $x_б = 2P_б$, $y_к = P_б$, $z_б = M_б$, откуда получаем, что $4P_б + M_б = 120$. Вновь учитывая, что $P_б = M_б$, получаем, что $P_б = M_б = 24$.

2 балла за уравнение КПВ Бэриленда относительно товаров

1 балл за нахождение количества полдников в Бэриленде

Таким образом, максимальный мировой объем потребления полдников равен $30 + 24 = 54$ полдника.

1 балл за нахождение суммарного объема потребления

Примечание. Участник может не выводить КПВ относительно товаров, а сразу перейти к уравнениям, учитывающим пропорции необходимых ресурсов: например, $2z_к + z_к + z_к = 120$ и $2z_б + 2z_б + z_б = 120$. При корректном обосновании этого способа действия баллы не должны снижаться.

Графическое решение (включающее построение графиков КПВ) не является необходимым и дополнительные баллы за него не ставятся, если приведено аналитическое решение. При этом сами графики представлены на Рис. 1.1.

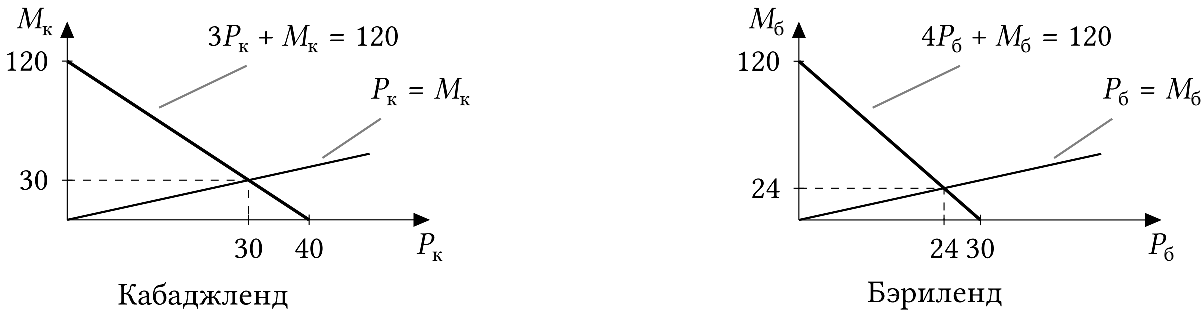

Рис. 1.1: Кривые производственных возможностей относительно товаров

б) В пункте **а)** мы вывели, что уравнения КПВ стран в координатах «пирожки-морс» имеют вид $3P_к + M_к = 120$ и $4P_б + M_б = 120$. Сложим эти КПВ стандартным образом:

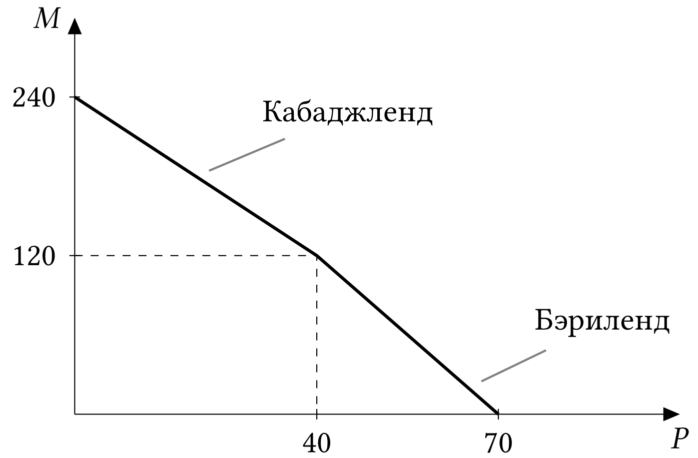

Рис. 1.2: Общая КПВ

Уравнение этой КПВ имеет вид:

5 баллов, если участник любым способом (аналитически или графически) демонстрирует, что может сложить эти КПВ.

$$M = \begin{cases} 240 - 3P, & \text{если } P < 40; \\ 280 - 4P, & \text{если } 40 \leqslant P \leqslant 70, \end{cases}$$

где P и M — мировые объемы производства пирожков и морса соответственно.

Теперь нам нужно пересечь график мировой КПВ с лучом $P = M$ (Рис. 1.3).

Заметим, что точка излома КПВ имеет координаты (40, 120), то есть в ней $M > P$. Следовательно, пересечение в КПВ произойдет на втором участке, то есть тогда, когда $M = 280 - 4P$. Получаем уравнение $M = 280 - 4M$, откуда $M = P = 56$.

3 балла за нахождение количества полдников (рисунок необязателен)

Таким образом, максимальный мировой объем потребления полдников теперь равен 56.

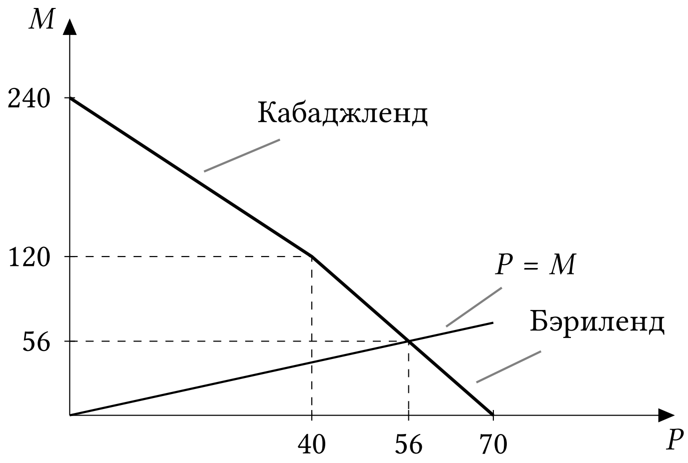

Рис. 1.3: Общая КПВ и полдники

Примечание. Задача может быть решена и без получения уравнения суммарной КПВ. Воспользовавшись идеей о сравнительных преимуществах (альтернативная стоимость пирожка в Кабаджленде меньше, чем в Бэриленде), заметим, что первый пирожок должен быть произведен в Кабаджленде. Однако даже если мы произведем там все возможные пирожки (40 штук), морса в Бэриленде можно будет произвести большее количество (120 стаканов), значит, там тоже частично нужно производить пирожки. Производя x дополнительных пирожков, мы отказываемся в Бэриленде от $4x$ стаканов морса. Чтобы в сумме не было лишних пирожков или морса, должно быть выполнено $40 + x = 120 - 4x$, то есть $x = 16$ и всего можно произвести 56 полдников.

Такое решение должно оцениваться полным баллом.

в) Докажем, что максимальный мировой объем потребления полдников равен 60. Для этого: 1) докажем, что искомый объем потребления не больше 60 (оценка); 2) приведем пример обмена между странами, при котором искомый объем равен 60 (пример).

1) (Оценка) Выпишем снова уравнения КПВ стран относительно ресурсов:

$$\begin{cases} x_к + y_к + z_к = 120, \\ x_б + 2y_б + z_б = 120. \end{cases}$$

Сложим эти уравнения (просто как уравнения, а не в смысле сложения КПВ). Получаем

$$(x_к + x_б) + (y_к + y_б) + (z_к + z_б) = 240 - y_б.$$

Обозначим количество полдников за Q. Заметим, что, в силу пропорций производства и потребления верны следующие равенства: $2Q = x_к + x_б$, $Q = y_к + y_б$, $Q = z_к + z_б$. Подставляя эти равенства в уравнения выше, получаем, что

9 баллов за доказательство того, что $Q \leqslant 60$

$$2Q + Q + Q = 240 - y_б \leqslant 240.$$

Таким образом, $4Q \leqslant 240$, откуда $Q \leqslant 60$, что мы и хотели доказать.

2) (Пример.) 60 полдников страны могут получить следующим образом:

6 баллов за пример

- Кабаджлэнд производит 60 единиц муки и 60 единиц капусты;
- Берилэнд производит 60 единиц муки и 60 единиц смородины;
- Кабаджлэнд отправляет 30 единиц капусты в Бэриленд, где из муки и этой капусты делают 30 пирожков;
- Из оставшейся капусты и муки в Кабаджлэнде делают 30 пирожков.
- Из смородины в Бэрилэнде делают 60 единиц морса;
- Бэрилэнд отправляет в Кабаджлэнд 30 единиц морса, в результате чего в каждой стране оказывается по 30 полдников.

Примечание 1. Этот пример не единственен. Легко проверить, что подойдет любой пример, в котором Кабаджлэнд производит 60 единиц капусты и отправляет в Бэрилэнд не меньше 30 из них (и при этом производство муки в двух странах определяется из количеств капусты, которые окажутся в двух странах в результате этого, а производство смородины определяется по остаточному принципу).

Примечание 2. Построение примера является неотъемлемой частью решения. Из того, что выполнено неравенство $Q \leqslant 60$ еще не следует, что оно может быть выполнено как равество. Действительно, наше доказательство неравенства $Q \leqslant 60$ никак не учитывало возможности торговли, а потому это неравество могло быть абсолютно так же доказано и в пунктах а) и б). Тем не менее, как мы видим, в этих пунктах верхняя граница $Q = 60$ не достигается.

Задача 2. «Упрощёнка» *(30 баллов)*

В современной России некоторые фирмы могут применять так называемую *упрощенную систему налогообложения*, при которой можно выбирать, какой налог — на выручку или на прибыль — платить.

Рассмотрим подобную систему в рамках простой модели. Представим себе фирму на рынке совершенной конкуренции, функция издержек которой описывается уравнением $TC = 0{,}5q^2 + 10q$, где q — объем выпуска. Государство предлагает фирме на выбор два налога — налог в размере 10 % от выручки или в размере 36 % от прибыли (эти ставки отличаются от действующих в современной России). При каждой цене P фирма решает, сколько единиц продукции произвести и какой из двух налогов платить. Фирма максимизирует прибыль.

Выведите уравнение функции предложения фирмы. Может ли в данном случае фирма при росте цены *снизить* выпуск? (Если да, то приведите пример, если нет, то обоснуйте.)

Решение. Найдем сначала оптимальный выпуск фирмы, если она выбрала определенный налог.

1) Налог на выручку. Фирма будет максимизировать

$$\pi_{\triangledown}(q) = (1 - 0{,}1)TR(q) - TC(q) = 0{,}9pq - 0{,}5q^2 - 10q.$$

4 балла за нахождение оптимального выпуска при выборе налога на выручку. Из них 1 балл снимается, если не проверено, что найден именно максимум (т. е. нет ссылки на то, что ветви вниз, π' меняет знак с + на –, или π'' отрицательна).

Графиком функции прибыли является парабола с ветвями вниз, поэтому оптимальный выпуск находится в ее вершине, если абсцисса вершины неотрицательна, и равен нулю в противном случае: $q = 0{,}9p - 10$ при $p \geqslant 100/9$ и $q = 0$ при $p < 100/9$. Максимальная прибыль при этом составит

3 балла за нахождение максимальной прибыли при выборе налога на выручку. Если участник забыл про случай $p < 100/9$, снимается 1 балл.

$$\pi_{\triangledown}(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 100/9; \\ \dfrac{(0{,}9p - 10)^2}{2}, & \text{если } p \geqslant 100/9. \end{cases}$$

2) Налог на прибыль. Фирма будет максимизировать

$$\pi_{\vartriangle}(q) = (1 - 0{,}36)\left(TR(q) - TC(q)\right) = 0{,}64(pq - 0{,}5q^2 - 10q).$$

4 балла за нахождение оптимального выпуска при выборе налога на прибыль. Из них 1 балл снимается, если не проверено, что найден именно максимум (т. е. нет ссылки на то, что ветви вниз, π' меняет знак с + на –, или π'' отрицательна).

Графиком функции прибыли вновь является парабола с ветвями вниз, поэтому оптимальный выпуск находится в ее вершине, если абсцисса вершины положительна, и равен нулю в противном случае: $q = p - 10$ при $p \geqslant 10$ и $q = 0$ при $p < 10$. Максимальная прибыль при этом составит

3 балла за нахождение максимальной прибыли при выборе налога на прибыль. Если участник забыл про случай $p < 10$, снимается 1 балл.

$$\pi_{\vartriangle}(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 10; \\ 0{,}64\dfrac{(p - 10)^2}{2}, & \text{если } p \geqslant 10. \end{cases}$$

3) Теперь найдем, при каких ценах выгоднее выбирать налог на выручку, а при каких — налог на прибыль. Выбирать налог на выручку выгоднее, если $\pi_{\triangledown}(p) > \pi_{\vartriangle}(p)$. Разобьем значения цены на интервалы в соответствии с полученными выше результатами:

- $p \leqslant 10$. В этом случае оптимальный выпуск при двух налогах совпадает и равен 0.

2 балла за разбор первого случая

- $10 < p \leqslant 100/9$. В этом случае $\pi_{\vartriangle}(p) > 0$, а $\pi_{\triangledown}(p) = 0$ — лучше выбирать налог на прибыль и производить $q = p - 10$.

2 балла за разбор второго случая

- $p > 100/9$. В этом случае налог на прибыль выгоднее, если

2 балла за формулировку этого неравенства

$$0{,}64\frac{(p-10)^2}{2} > \frac{(0{,}9p-10)^2}{2}.$$

Это неравенство легко решить, умножая обе части на 2 и извлекая квадратный корень (выражения в скобках положительны). Получаем $p < 20$ — условие, при котором налог на прибыль (и производить $q = p - 10$) выгоднее. При $p > 20$ выгоднее выбирать налог на выручку (и производить $q = 0{,}9p - 10$), при $p = 20$ варианты равнозначны.

2 балла за решение неравенства

В итоге, функция предложения фирмы будет описываться уравнением

4 балла за вывод итоговой функции предложения

$$q_s(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 10; \\ p - 10, & \text{если } 10 \leqslant p \leqslant 20; \\ 0{,}9p - 10, & \text{если } p \geqslant 20. \end{cases}$$

(При $p = 20$ оба выпуска ($p - 10$ и $0{,}9p - 10$) являются оптимальными.)

При росте цены фирма может снизить выпуск. Например, при росте цены с 19 до 21 фирме выгодно *снизить* выпуск с 9 до 8,9 единиц.

4 балла за правильный ответ и любой правильный пример

Задача 3. «Закупка и налог» *(30 баллов)*

В стране Альфа производится и потребляется всего два товара: X и Z, которые продаются и покупаются на рынках совершенной конкуренции. В 2015 году на этих рынках функции спроса и предложения имели вид:

	Спрос	**Предложение**
Товар X	$X_D = 10/P_X$	$X_S = 10P_X$
Товар Z	$Z_D = 40/P_Z$	$Z_S = 10P_Z$

В 2016 году правительство страны Альфа планирует закупить 15 единиц товара X для своих нужд. Чтобы сохранить прежнее сальдо бюджета, правительство профинансирует эту закупку за счет потоварного налога, взимаемого с производителей другого товара.

Считайте, что других событий, способных как-то повлиять на спрос и предложение товаров, в 2016 году не произойдет. Иными словами, не будет воздействия никаких прочих факторов, а рынки товаров X и Z не связаны между собой (то есть, например, X не является субститутом или комплементом Z, а также ресурсом для его производства). При расчете ВВП игнорируйте все возможные мультипликативные эффекты.

а) *(5 баллов)* Не проводя расчетов, определите, вызовет ли политика правительства инфляцию или дефляцию в стране Альфа в 2016 году. Аргументируйте свой ответ.

б) *(10 баллов)* Какую ставку потоварного налога на производство товара Z следует установить правительству для выполнения сформулированной задачи?

в) *(10 баллов)* На сколько процентов и в каком направлении в результате указанной политики изменится реальный ВВП страны Альфа? Считайте базовым 2015 год.

г) *(5 баллов)* Чему будет равен индекс потребительских (ИПЦ) в стране Альфа в 2016 году? Примите индекс 2015 года за единицу.

Решение.

а) Из-за действий государства на рынке товара X *вырастет спрос и, следовательно, вырастет равновесная цена.* На рынке товара Z *из-за введения налога тоже вырастет равновесная цена для потребителей.* Так как цены всех товаров растут, то *указанная политика правительства приведет к инфляции.*

По 1 баллу за спрос и равновесную цену

2 балла за рост цены как следствие налога

1 балл за вывод

б) В 2016 году за счет государственных закупок товара X *спрос на этот товар составит*:

1 балл за новую функцию спроса

$$X_D = \frac{10}{P_X} + 15.$$

Найдем *новое равновесие* на рынке этого товара:

2 балла за новое равновесие

$$\frac{10}{P_X} + 15 = 10 \cdot P_X, \qquad (3.1)$$
$$P_X^{2016} = 2,\ X^{2016} = 20.$$

Для закупки 15 единиц товара X по такой равновесной цене *государству потребуется* $15 \cdot 2 = 30$ денежных единиц, следовательно, потоварный налог на рынке товара Z нужно устанавливать таким образом, чтобы поступления в бюджет в результате его введения равнялись этой сумме.

1 балл за расчет расходов

С учетом налога *функция предложения в 2016 году* будет иметь вид: $Z_S = 10 \cdot (P_Z - t)$, а функция спроса останется без изменений. Из всего сказанного выше следует система уравнений, откуда можно найти *все нужные нам переменные*:

1 балл за новую функцию Z_S

2 балла за запись нужных соотношений в том или ином виде

$$\begin{cases} \frac{40}{P_Z} = 10 \cdot (P_Z - t); \\ \frac{40}{P_Z} \cdot t = 30. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Решая эту систему, находим:

3 балла за нахождение $t = 3$

$$P_Z^{2016} = 4, \quad t = 3.$$

Ставка налога составляет 3 денежных единицы.

Примечание: участник может не искать равновесия на двух рынках по отдельности, а сразу составить систему из уравнения (3.1) и уравнений системы (3.2). При условии объяснения выполняемых действий баллы за такое решение снижаться не должны.

в) Чтобы найти равновесные параметры двух рынков до государственного вмешательства (в 2015 году), приравняем спрос и предложение из таблицы в условии:

$$\begin{cases} \dfrac{10}{P_X} = 10P_X; \\ \dfrac{40}{P_Z} = 10P_Z. \end{cases}$$

По 2 балла за каждое из двух равновесий в 2015 году

Решив эту систему, составим таблицу из известных значений цен и выпусков:

	P_X	X	P_Z	Z
2015	1	10	2	20
2016	2	20	4	10

Реальный ВВП 2015 года равен:

2 балла за РВВП-2015

$$P_X^{2015} \cdot X^{2015} + P_Z^{2015} \cdot Z^{2015} = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 50.$$

Реальный ВВП 2016 года (в ценах 2015 года) равен:

2 балла за РВВП-2016

$$P_X^{2015} \cdot X^{2016} + P_Z^{2015} \cdot Z^{2016} = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 40.$$

Таким образом, в результате реализации предложенной политики реальный ВВП упадет на 20 %.

По 1 баллу за подсчет процентного изменения и определение его направления

г)

3 балла за корректную формулу ИПЦ

2 балла за корректный подсчет

$$\text{ИПЦ} = \frac{P_X^{2016} \cdot X^{2015} + P_Z^{2016} \cdot Z^{2015}}{P_X^{2015} \cdot X^{2015} + P_Z^{2015} \cdot Z^{2015}} = \frac{2 \cdot 10 + 4 \cdot 20}{50} = 2.$$

Задача 4. «Осторожный Кузьма» *(30 баллов)*

Депозит до востребования стабильно приносит Кузьме 10 % годовых. Сейчас на его счету находятся 1,5 миллиона рублей. Банк не накладывает никаких ограничений на снятие средств с депозита, ставка процента в любом случае остается неизменной.

Кузьма рассматривает возможность вложить деньги в более доходные, но и более рискованные финансовые инструменты. Он может купить акции компании-туроператора *A* или компании *B*, продающей зонтики, а также комбинировать эти варианты.

Доходность акций в течение будущего года зависит от погоды, которая неизвестна заранее. Погода может оказаться либо хорошей (и тогда будут пользоваться популярностью услуги туроператора *A*), либо плохой (и тогда будут пользоваться популярностью зонтики компании *B*). Текущая стоимость активов, а также ожидаемая Кузьмой стоимость активов в зависимости от погоды представлены в таблице:

Актив	Текущая стоимость актива	Ожидаемая стоимость актива	
		при хорошей погоде	при плохой погоде
Акции *A*	10 руб. за акцию	20 руб. за акцию	6 руб. за акцию
Акции *B*	10 руб. за акцию	7 руб. за акцию	14 руб. за акцию

Брать кредит Кузьма не может, других способов вложения денег нет. Обозначим за a и b суммы денег (в миллионах рублей), вложенные в акции соответствующих компаний, а за d — сумму, оставшуюся на депозите. Под *стоимостью портфеля* будем понимать сумму стоимости имеющихся у Кузьмы акций и суммы денег на его счету.

а) *(8 баллов)* Предположим, что перед тем, как Кузьма должен принять решение о вложении в активы, Гидрометцентр делает одно из двух предсказаний: «будет хорошая погода» или «будет плохая погода». Как Кузьма поступит со своими деньгами в зависимости от прогноза (считайте, что он безоговорочно верит этому прогнозу), если он хочет, чтобы стоимость его портфеля через год была максимальной? Чему будет равна ожидаемая стоимость его портфеля через год в каждом из этих случаев?

б) *(15 баллов)* Предположим, Кузьма должен принять решение до того, как Гидрометцентр сделал прогноз. Для каждого распределения денег между акциями и депозитом он рассчитывает стоимость своего портфеля через год при *наименее благоприятной* для данного распределения денег погоде. Затем он выбирает такое распределение денег, при котором рассчитанная минимальная стоимость портфеля через год максимальна. Как он распределит деньги в этом случае? (Назовем такую стратегию *осторожной.*) Чему будет равна стоимость его портфеля через год?

в) *(7 баллов)* Если бы у Кузьмы была возможность заплатить Гидрометцентру, чтобы получить предсказание погоды до вложения в активы, какую максимальную сумму он был бы готов заплатить? Считайте, что оплата производится до предсказания, а Кузьма придерживается осторожной стратегии как при выборе распределения денег, так и и при принятии решения о том, покупать прогноз погоды или нет.

Решение. Заметим, что $a + b + d = 1{,}5$. Составим таблицу с расчетом стоимости всех активов Кузьмы в разных случаях и подставим $d = 1{,}5 - a - b$:

Ожидаемая стоимость актива	
при хорошей погоде	при плохой погоде
$S_g = 2a + 0{,}7b + 1{,}1d =$ $= 1{,}65 + 0{,}9a - 0{,}4b$	$S_b = 0{,}6a + 1{,}4b + 1{,}1d =$ $= 1{,}65 - 0{,}5a + 0{,}3b$

(Изначальные коэффициенты перед a и b рассчитаны как отношение новой и старой цены, то есть показывают, во сколько раз увеличиваются вложения. Соответствующее количество акций равно $a/10$ и $b/10$, а их стоимость через год, скажем, при хорошей погоде равна $20a/10 = 2a$ и $7a/10 = 0{,}7b$.)

а) Каждая из двух получившихся функций возрастает по одной из переменных (a или b) и убывает по другой. Значит, для максимизации нужно выбирать максимально возможное значение одной переменной (1,5) и минимальное значение другой (0). Таким образом, нужно вкладывать в акции определенной компании все 1,5 миллиона, не оставляя ничего на депозите.

К такому же выводу можно было прийти, сравнив доходности трех активов: у депозита она равна 10 %, у компании A в хорошую погоду и у компании B в плохую погоду — больше (100 % и 40 %), а у компании B в хорошую погоду и у компании A в плохую погоду — меньше (−40 % и −30 %).

Таким образом, при хорошем прогнозе погоды Кузьма вложит все деньги в акции компании А, *а при плохом — вложит все деньги в акции компании* В, *не оставляя ничего на депозите.* (Также ответ можно дать в виде количества акций: нужно купить 150 тыс. акций соответствующей компании.) *В первом случае ожидаемая стоимость портфеля через год будет равна 3 млн руб., а во втором она будет равна 2,1 млн руб.*

По 3 балла за правильный вывод для каждого вида погоды с обоснованием

По 1 баллу за правильный расчет стоимости портфеля при каждой погоде

Примечание. Участник не обязан записывать функции конечной стоимости портфеля именно так, как они записаны выше. В частности, он может выражать из равенства $a + b + d = 1{,}5$ другую переменную и максимизировать функцию по оставшимся, или решать задачу условной максимизации, если знаком с соответствующими методами (эти методы не входят в школьную программу по математике, поэтому проверять подобные решения нужно с особой тщательностью, снижая баллы за все необоснованные шаги).

б) Найдем, при каком условии стоимость портфеля в хорошую погоду будет не меньше, чем в плохую (то есть минимальной будет стоимость портфеля при плохой погоде):

$$1{,}65 + 0{,}9a - 0{,}4b \geqslant 1{,}65 - 0{,}5a + 0{,}3b \iff 2a \geqslant b.$$

Минимальная (из двух типов погоды) стоимость портфеля Кузьмы составит

4 балла за расчет минимальной стоимости портфеля, из них 2 балла — за определение условия $2a \geqslant b$.

$$\min\{S_g; S_b\} = \begin{cases} 1{,}65 + 0{,}9a - 0{,}4b, & \text{если } 2a \leqslant b; \\ 1{,}65 - 0{,}5a + 0{,}3b, & \text{если } 2a \geqslant b. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Кузьма стремится, чтобы значение этого выражения было максимально, выбирая a и b, удовлетворяющие условиям $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a + b \leqslant 1{,}5$. (Значение d затем определяется автоматически из условия $d = 1{,}5 - a - b$.)

Зафиксируем a и найдем оптимальное b при каждом a. Как видно из формулы (4.1), Кузьме нужно выбирать самое маленькое b при $2a \leqslant b$ и самое большое b при $2a \geqslant b$. Так или иначе, решением будет $b = 2a$, то есть ему нужно сделать так, чтобы стоимость портфеля была одинакова независимо от погоды. Тогда стоимость активов будет равна

6 баллов за вывод о том, что $b = 2a$ (стоимость портфеля не зависит от погоды), с обоснованием

$$S = 1{,}65 + 0{,}9a - 0{,}4 \cdot 2a = 1{,}65 + 0{,}1a.$$

Видно, что эта функция возрастает по a, то есть оптимальным будет максимальное значение a, удовлетворяющие условию $a + 2a \leqslant 1{,}5$, откуда $a = 0{,}5$, $b = 2a = 1$, $d = 0$.

Итак, Кузьма должен вложить 500 тыс. руб. в акции компании A *и 1 млн руб. в акции компании* B. (Также ответ можно дать в виде количества акций: нужно купить 50 тыс. акций компании *A* и 100 тыс. акций компании *B*.) Стоимость портфеля через год при этом будет равна $S = 1{,}65 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 1{,}7$ млн руб. независимо от погоды.

4 балла за итоговый ответ о вложении денег с обоснованием

1 балл за расчет стоимости портфеля

Примечание. Как мы видим, оптимальной в данном случае является покупка акций обеих компаний. Это явление получило название *диверсификация портфеля* или *хеджирование рисков*. Действительно, если доходность двух акций находится «в противофазе» (экономисты говорят в этом случае об «отрицательной корреляции»), покупка акций второго типа является страховкой от убытков по акциям первого типа, и наоборот.

Это примечание носит информационный характер и не должно требоваться при проверке работ. Тем не менее, если участник, не решая задачу численно, опишет идею диверсификации (то есть сделает вывод, что инвестиции нужно делить между *A* и *B*), то за весь пункт ставится не более 5 баллов в зависимости от четкости обоснования.

в) Если Кузьма не платит Гидрометцентру, то, как мы нашли в **б)**, при использовании острожной стратегии он получает 1,7 млн. Рассматривая возможность заплатить гидрометцентру, при осторожной стратегии он должен исходить из плохого прогноза, поскольку там доходность меньше — он будет согласен заплатить X, если *даже в худшем случае стоимость его портфеля не уменьшится по сравнению с пунктом* ***б)***. Если он заплатит сумму X, то при плохом прогнозе вложит в акции компании B $(1{,}5 - X)$ млн руб. Стоимость его активов в конце, таким образом, составит $1{,}4(1{,}5 - X)$.

4 балла за идею о том, что покупка прогноза должна окупаться в худшем случае.

Чтобы заплатить Гидрометцентру было выгодно, необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$1{,}4(1{,}5 - X) \geqslant 1{,}7.$$

Отсюда $X \leqslant 2/7$ млн руб.

3 балла за составление неравенства и нахождение X. Если участник округлил ответ до ближайшего целого, снимать баллы не нужно.