Время на выполнение заданий - 120 минут

Вам необходимо привести решение всех заданий. Обратите внимание, что ответы без решений и необходимых пояснений не будут засчитаны! Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все не общеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное. Излагайте свои мысли четко, пишите разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе. Всегда обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. В работе не должно быть никаких пометок, не имеющих отношения к выполнению заданий.

Удачи!

Задание 1. «Смешанные стратегии» (25 баллов)

Одним из центральных понятий в теории игр является идея смешанных стратегий. Смешанная стратегия – это такая стратегия, которая специфицирует набор действий, доступных экономическому агенту, и частоту, с которой он выбирает каждое конкретное из этих действий. Рассмотрим простой пример. Два пешехода идут по узкому тротуару навстречу друг другу, и каждый из них должен решить, с какой стороны: справа или слева – обойти другого. Тогда набор действий состоит из двух элементов: “обойти встречного пешехода справа” и “обойти встречного пешехода слева”. Допустим, первый пешеход всегда выбирает “обойти встречного пешехода справа” (иначе говоря, его стратегия является чистой), а второй, основываясь на собственном опыте, решает “обойти встречного пешехода справа” ровно в половине случаев. Тогда смешанная стратегия второго пешехода состоит из двух указанных действий и частоты выбора каждого из них – 50%.

Василий Семихатов является ярым фанатом большого тенниса и теории игр. Василий знает, что игроки в большом теннисе никогда не посылают мяч в одну и ту же часть поля соперника, иначе говоря, они бьют либо влево (действие Л), либо вправо (действие П), либо по центру (действие Ц). Василий начал подозревать, что атлеты используют смешанные стратегии с набором действий (Л, Ц, П), и озадачился тем, как проверить это предположение.

(а) (8 баллов) Объясните, почему спортсменам вообще может быть выгодно использовать смешанные стратегии.

(б) (9 баллов) Предложите подход, который позволил бы Василию Семихатову эмпирически проверить гипотезу о том, что спортсмены в большом теннисе используют смешанные стратегии.

(в) (8 баллов) Предположим, что Василий Семихатов не нашел подтверждения тому, что спортсмены в большом теннисе используют смешанные стратегии. Укажите две причины, которые могут объяснить расхождение в реальном поведении игроков и поведении игроков согласующимся с использованием смешанных стратегий. Если вы укажете три причины и более, то засчитаны будут только первые две.

Решение:

(а) Использование смешанных стратегий делает каждое конкретное действие игрока не предсказываемым для конкурента, а значит повышает его шансы на выигрыш.

Например, если бы какой-то игрок систематически выбирал действие Л, то оппонент очень быстро вычислил бы это и использовал в собственных интересах, снижая шансы игрока, который использует описанную в примере стратегию, на победу.

(б) Поскольку смешанная стратегия позволяют сделать действие игрока непредсказуемым, то для тестирования гипотезы Василию Семихатову нужно проверить, может ли действие, выбранное игроком сейчас, быть предсказано с помощью действия, которое он выбрал при предыдущем ударе. Иначе говоря, необходимо установить, есть ли какая-то систематическая последовательность действий, используемая тем или иным игроком (например, Л практически всегда после П, а Ц практически всегда после Л). Если таковая систематическая последовательность действий обнаружена, то стоит предполагать, что игрок отказался от использования смешанной стратегии в игре.

Чтобы применить такой подход, можно, например, записать последовательность действий, выбираемых каждым конкретным игроком в ходе игры, а также определить частоту использования этих действий. Затем проверить, есть ли какие-то статистически устойчивые закономерности действий игрока. Если такие закономерности не найдены, то можно предположить, что игрок использует смешанную стратегию.

(в) Приведем возможные причины.
1) В зависимости от того, на какой стадии находится игра (например, ближе к финалу), значимость выигранных очков, а следовательно, и стратегия игрока могут меняться.
2) Игроки могут обладать определенной информацией друг о друге (например, спортсмен знает, что его конкурент часто использует определенные комбинации действий. Поэтому, наблюдая начало такой комбинации у противника, игрок может предпринимать заранее заготовленные ответные действия или их комбинацию.
3) Игроки «нерациональны» и не понимают, что используемые ими стратегии, комбинации предпринимаемых ими действий в игре, недостаточны, чтобы сделать их действия непредсказуемыми для конкурента.

Критерии оценивания:

Критерий 1 пункт (а) *Объяснено, (возможно, на примере) какие преимущества дает смешанная стратегия игрокам — 4 балла.*
Критерий 2 пункт (а) *Объяснено, (возможно, на примере) почему при отказе от использования смешанной стратегии шансы на победу снижаются — 4 балла.*
Критерий 1 пункт (б) *Объяснено, (возможно, на примере) какие статистические данные необходимо собрать для такого исследования — 4 балла.*
Критерий 2 пункт (б) *Объяснено, (возможно, на примере) каким образом полученные статистические данные позволят судить о том, используется ли смешанная стратегия — 5 баллов.*
Критерий 1 пункт (в) *Приведена с пояснениями одна причина (возможно, на примере) — 4 балла.*
Критерий 2 пункт (в) *Приведена с пояснениями вторая причина (возможно, на примере) — 4 балла.*

Задание 2. «Два завода» (30 баллов)
Компания-монополист владеет двумя заводами, один из которых находится в регионе A, а другой – в регионе B. Функции издержек заводов при любом объеме выпуска имеют вид $TC_A(q_A) = q_A^2/2,\ TC_B(q_B) = 100q_B + q_B^2/2$. В настоящее время между регионами нет прямого сообщения, компания имеет возможность продавать товар только в том регионе, где он был произведен, а потребители товара приобретают его только в своем регионе. Спрос на продукцию в регионе A представлен функцией $P_A(q_A) = 300 - q_A$, а в регионе B: $P_B(q_B) = 500 - q_B/2$.
(а) (10 баллов) Сколько товара и по какой цене в каждом регионе будет продавать монополист, максимизирующий свою прибыль?
(б) (20 баллов) Предположим теперь, что между регионами открылось прямое автомобильное сообщение. Товар можно свободно перевозить. Потребители теперь тоже могут перемещаться между регионами и покупать товар там, где он дешевле, если цены разные. Если цены одинаковые, потребитель покупает товар в своем регионе. Определите новые объемы производства и потребления в каждом из двух регионов. Увеличится ли прибыль монополиста по сравнению с пунктом (а)?

Решение:
(а) Подставляя данные из задачи в функцию прибыли монополиста отдельно для каждого региона (так как каждый завод обеспечивает товарами свой регион) и максимизируя прибыль монополиста, получим объем выпуска и цену в каждом регионе.
В регионе A:
$\Pi_\text{A} = P_\text{A}(q_\text{A})q_\text{A} - TC_\text{A}(q_\text{A}) = (300 - q_A)q_A - \frac{q_A^2}{2} = 300q_A - q_A^2 - q_A^2/2 = 300qA - 1{,}5\, qA2$.
Аналогично в регионе B:
$\Pi_B = \left(500 - \frac{q_B}{2}\right)q_B - (100q_B + q_B^2/2) = 400q_B - q_B^2$.

Замечаем, что для каждого из регионов график прибыли относительно объема выпускаемой продукции - парабола с ветвями вниз, то есть максимум достигается в вершине. Максимум прибыли достигается при объемах и ценах:
$q_A = 100,\ P_\text{A} = 200,$
$q_B = 200, \text{P}_\text{B} = 400.$

В регионе A монополист продает 100 единиц товара по цене 200. В регионе B монополист продает 200 единиц товара по цене 400.

(б) Условие «Потребители теперь тоже могут перемещаться между регионами и покупать товар там, где он дешевле, если цены разные», означает, что монополист встречается с совокупным спросом на свою продукцию и товар в обоих регионах продается по одинаковой цене.

Найдем функцию спроса в этом случае. Обратим внимание, что в регионе A потребители согласны покупать товар при цене ниже 300, в регионе B – при цене ниже 500. Прямые функции спроса $q(P)$ в регионах имеют вид:
$q_A(P_A) = 300 - P_A, q_B(P_B) = 1000 - 2P_B,$
Совокупная функция спроса имеет вид: $Q(P) = 1000 - 2P$, если $500 \geq \text{P} \geq 300$, и $Q(P) = 1300 - 3\text{P}$, если $P < 300$, или обратная функция спроса $\text{P}(Q) = 500 - Q/2$, если $Q \leq 400$, и $\text{P}(Q) = (1300 - Q)/3$, если $Q > 400$.

Так как монополист может теперь без дополнительных затрат перевозить товар из одного региона в другой, то он будет распределять производство товара между заводами наиболее выгодным образом: любой объем товара он будет стараться произвести с наименьшими издержками. Если всего ему нужно произвести Q единиц товара, то на заводе A он произведет количество q_A, а на заводе B – количество q_B. Тогда совокупные издержки монополиста можно записать в виде:
$TC(q_A + q_B) = \frac{q_A^2}{2} + 100q_B + \frac{q_B^2}{2} = \frac{(Q-q_B)^2}{2} + 100q_B + \frac{q_B^2}{2}$, где $q_A = Q - q_B$.

Относительно переменной q_B график функции представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх, минимум функция достигает в вершине параболы в точке $q_B = \frac{Q}{2} - 50$. Поэтому, если на заводе В производится положительный объем продукции, что возможно только при $\mathrm{Q} > 100$, то $q_B = \frac{Q}{2} - 50$, иначе, при $\mathrm{Q} \leq 100$ весь объем продукции производится только на заводе А.

Действительно, если $\mathrm{Q} = q_A + q_B \leq 100$ и $q_B > 0$, то $Q - q_B < 100$, тогда

$$TC(q_A + q_B) = \frac{q_A^2}{2} + 100q_B + \frac{q_B^2}{2} = \frac{(Q-q_B)^2}{2} + 100q_B + \frac{q_B^2}{2} = \frac{1}{2}[(Q - q_B)^2 + 2 * 100q_B + q_B^2] > \frac{1}{2}[(Q - q_B)^2 + 2 * (Q - q_B)q_B + q_B^2] = \frac{1}{2}[(Q - q_B) + q_B]^2 = \frac{Q^2}{2} = TC(q_A + 0).$$

То есть, издержки монополиста при $\mathrm{Q} \leq 100$ будут меньше, если он откажется от производства на заводе в регионе В и весь объем произведет на заводе в регионе А.

Если же $\mathrm{Q} > 100$, то на заводе в регионе А производится $q_A = \frac{Q}{2} + 50$, а остальной объем в размере $q_B = \frac{Q}{2} - 50$ будет произведен на заводе в регионе В.

Таким образом, функция издержек монополиста, который производит товар с минимальными затратами, будет иметь вид:

$$TC(Q) = \begin{cases} \frac{Q^2}{2},\ Q \leq 100 \\ \frac{\left(\frac{Q}{2}+50\right)^2}{2} + 100\left(\frac{Q}{2} - 50\right) + \frac{\left(\frac{Q}{2}-50\right)^2}{2} = \frac{Q^2}{4} + 50Q - 2500,\ Q > 100 \end{cases}$$

Альтернативный подход к поиску распределения объемов производства между заводами.

При любом совокупном объеме выпуска, если выпускают продукцию оба завода, то предельные издержки производства на каждом из заводов должны быть равны. Иначе стоило бы перебросить часть произведенной продукции на тот завод, где предельные издержки производства меньше, сократив при этом совокупные издержки. Поэтому, если $q_A > 0$ и $q_B > 0$, то $MC(q_A) = q_A = MC(q_B) = 100 + q_B$. Так как $q_A + q_B = Q$, то получим объем выпуска на каждом заводе: $q_A = \frac{Q}{2} + 50$ и $q_B = \frac{Q}{2} - 50$, что возможно только при $Q > 100$. Если же $Q \leq 100$, то выгоднее выпускать весь объем товара только на заводе А, поскольку предельные издержки производства на этом заводе будут не более 100, что меньше, чем на заводе В.

Теперь найдем, какое количество товара и его цена будет максимизировать прибыль монополиста, который продает товар по единой цене на двух рынках, распределяя выпуски между заводами. Запишем выражение для прибыли монополиста с учетом всех ограничений:

$$\Pi = \begin{cases} \left(500 - \frac{Q}{2}\right)Q - \frac{Q^2}{2}, Q \leq 100 \\ \left(500 - \frac{Q}{2}\right)Q - \frac{\left(\frac{Q}{2}+50\right)^2}{2} - 100\left(\frac{Q}{2} - 50\right) - \frac{\left(\frac{Q}{2}-50\right)^2}{2}, 100 < Q \leq 400 \\ \frac{1300-Q}{3} * Q - \frac{\left(\frac{Q}{2}+50\right)^2}{2} - 100\left(\frac{Q}{2} - 50\right) - \frac{\left(\frac{Q}{2}-50\right)^2}{2}, Q > 400 \end{cases}$$

На каждом интервале по Q график функции прибыли представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз, максимум достигается в вершине параболы.

Прибыль на первом интервале: $\Pi = \left(500 - \frac{Q}{2}\right)Q - \frac{Q^2}{2}$, максимум при $Q = 250$, но найденная точка не принадлежит интервалу $Q \leq 100$.

Прибыль на третьем интервале: $\Pi = \frac{1300-Q}{3} * Q - \frac{\left(\frac{Q}{2}+50\right)^2}{2} - 100\left(\frac{Q}{2} - 50\right) - \frac{\left(\frac{Q}{2}-50\right)^2}{2}$, максимум при $Q = 153,(3)$, но найденная точка не принадлежит интервалу $Q > 400$.

Максимум прибыли достигается на интервале $100 < Q \leq 400$ при $Q = 300, P = 350$. Причем товар будет продаваться только в регионе В, но часть этого объема производится в регионе А, а именно, в каждом регионе будет произведено: $q_A = \frac{Q}{2} + 50 = 200$, $q_B = \frac{Q}{2} - 50 = 100$.

Посчитаем и сравним прибыль монополиста в случае наличия (б) и отсутствия (а) транспортного сообщения между регионами:
$П(б) = 350 * 300 - 2002/2 - 100 * 100 - 1002/2 = 105000 - 20000 - 10000 - 5000 = 70000$,
$П(а) = П_А + П_В = (200 * 100 - 1002/2) + (400 * 200 - 100 * 200 - 2002/2) = 15000 + 40000 = 55000$.
Прибыль в случае наличия транспортного сообщения оказалась выше.

Заметим, что с одной стороны после открытия сообщения монополист лишается возможности продавать товар в каждом регионе по различной цене, то есть возможности проводить ценовую дискриминацию между регионами, что, как правило, снижает его прибыль. Например, в данном случае монополист лишается рынка региона А. С другой стороны, у монополиста появляется возможность эффективнее распределять производство товара между заводами, что приводит к снижению издержек производства при том же объеме выпускаемой продукции, тем самым повышая прибыль монополиста. Таким образом, разнонаправленно действуют два эффекта, результат которых заранее не может быть определен.

Критерии оценивания:

Пункт (а)
Обоснование идеи максимизировать прибыль отдельно в каждом регионе — 1 балл.
Правильно составленное выражение для прибыли монополиста в каждом регионе — 1 баллу.
За верные обоснованные расчёты объема и цен в каждом регионе — по 3 балла.
Обоснование максимума прибыли (если хотя бы в одном регионе это было обосновано) — 1 балл.

Пункт (б)
Верно найден совокупный спрос — 3 балла,
Верно найдена функция издержек — 6 баллов,
Верно выписана функция прибыли с указанием всех интервалов — 3 балла
Верно вычислены все равновесные объемы и цены — 4 балла,
Обоснование максимума — 1 балл.
Верно вычислена прибыль и проведено сравнение прибыли — 3 балла.

На любом этапе решения за каждую арифметическую ошибку, которая не привела к искажению результатов по существу, снимается 1 балл.

Задание 3. «Расстояние между товарами» (20 баллов)
Гарвардский Atlas of Economic Complexity[1] анализирует структуру экспорта разных стран. Для этого собираются ежегодные данные по объёму экспорта самых разных товаров (разбитых на несколько тысяч групп). В числе прочего там решается задача расчёта «близости» разных групп товаров – определение того, насколько группы товаров близки друг к другу. К примеру, «замороженная клубника» и «замороженная малина» – это близкие группы товаров. А «породистые лошади» и «сплавы редкоземельных металлов» — это далёкие друг от друга группы товаров.
Для расчёта близости используется следующий показатель:

$$\text{Близость (товар1, товар2)} = \frac{\text{число стран, экспортирующих оба товара}}{maximum\{\text{число стран, экспортирующих товар1; число стран, экспортирующих товар2}\}}$$

(а) (8 баллов) Какие значения может принимать рассчитанный таким образом показатель близости? Какие (большие или меньшие) значения этого индикатора соответствуют более близким друг другу товарам?
(б) (5 баллов) В приведённой выше формуле нет никаких характеристик технологического процесса производства товаров, хотя логично было бы считать близость именно по близости технологического процесса. Почему характеристики технологических процессов не учитываются явным образом в приведенной формуле? Объясните, какую предпосылку делают авторы, считая близость товаров именно таким образом.
(в) (7 баллов) Каким образом можно делать рекомендации по развитию производства в данной стране, зная показатели близости товарных групп и структуру экспорта страны?

Решение:

(а) Показатель изменяется от 0 до 1, чем ближе к 1 – тем ближе товары:

- В случае, когда товары совсем разные и нет стран, экспортирующих оба одновременно, числитель дроби в формуле будет равен 0 и показатель близости будет равен 0.
- В случае, когда товары очень похожи и все страны, производящие и экспортирующие один, производят и экспортируют и второй, число экспортирующих оба товара стран и число экспортирующих один из товаров стран просто совпадут. В случае, когда в формуле числитель и знаменатель совпадут, показатель близости будет равен 1.

(б) Очень сложно измерить близость технологического процесса (непонятно, в чём её измерять, не существует какого-то одного показателя, которым можно охарактеризовать технологический процесс). Поэтому авторы предполагают, что если технологические процессы близки, то страны в среднем будут производить оба товара. А если оба товара производятся – то оба и экспортируются

(в) Берём основные статьи экспорта. Берём наиболее близкие к ним продукты – и среди них выбираем те, которые не экспортируются (или экспортируются в недостаточном объёме). Если есть сравнительное преимущество в производстве товара, то, вероятно, есть и сравнительное преимущество в производстве близких к ним, т. к. требуются схожие ресурсы и технологии. Не придется совершать большие вложения для того, чтобы начать их выпускать на экспорт

Критерии оценивания:

Пункт (а): *всего 8 баллов.*
Вопрос 1. Показатель принимает значения от 0 до 1.

- *Правильный ответ: 2 балла*
- *Объяснение: 1 балл*

[1] https://atlas.cid.harvard.edu

Вопрос 2. Чем выше значения показателя, тем более близки друг другу товары.

- *Правильный ответ: 2 балла*
- *Объяснение: 3 балла*

Штрафы:

-1 балл: 0 или 1 не включены в диапазон

-1 балл: показатель «стремится» к какому-то значению

При отсутствии правильного ответа, 1 балл ставился за минимальное продвижение в обосновании ответа на вопрос 2.

Пункт (б): *всего 5 баллов.*

Близость технологического процесса учитывается неявно. Если товары производятся из схожих ресурсов и по схожим технологиям, то страна, которая специализируется на первом товаре, обычно может специализироваться и на втором: ответ с объяснением - 3 балла.

Предпосылка о специализации экономик во внешней торговле, экспорте товаров, производимых с меньшими альтернативными издержками: ответ с объяснением - 2 балла

Штрафы:

-1 балл: не объяснено, почему сложно учесть близость технологического процесса явно.

-2 балла: отсутствует идея о специализации во внешней торговле.

Дополнительные разумные соображения, которые были учтены, если участник не предложил полный корректный ответ на вопросы задания:

+2 балла: близость сигнализирует о схожести ресурсов.

+1 балл: сказано, что схожесть технологического процесса вычислить сложно, но не объяснено, почему помогает формула близости.

+1 балл: если товары близки, то сравнительные преимущества совпадают (без обоснования).

+1 балл: предпосылка об эффективности производства/экспорта, о рациональности.

+1 балл: технологический процесс производства исследуемых товаров практически одинаков в исследуемых странах.

Пункт (в): *всего 7 баллов.*

Специализация на товарах, которые близки к тем, что уже экспортируются.

- *Идея: 2 балла*
- *Объяснение: 5 баллов*

Штрафы*:*

-3 балла: не указано, что можно начать экспортировать близкие товары, которые еще не экспортируются.

-3 балла: нет идеи о специализации во внешней торговле.

-2 балла: рассуждение о спросе на товары без обоснования.

-3 балла: не объяснено, почему выгодно специализироваться сразу на нескольких близких товарах.

Дополнительные разумные соображения, которые были учтены, если участник не предложил полный корректный ответ на вопросы задания:

+3 балла: можно торговать со странами, которые производят далекие товары.

+3 балла: если страна производит далекие друг от друга товары, ей нужно усилить специализацию.

+2 балла: идея использовать сравнительные преимущества.

+1 балл: близость свидетельствует о диверсификации экспорта.

+1 балл: совмещать близкие товары в производстве.

+1 балл: по близости можно косвенно узнать об изменениях спроса на товары.

Задание 4. «Джини» (25 баллов)

В стране Саэсии[2] есть две группы населения — богатые и бедные, в каждой из которых доход распределен равномерно. Доход каждой из групп положителен. Известно, что коэффициент Джини в стране равен 0,5. В какое минимальное число раз могут отличаться доходы богатых и бедных в Саэсии?

Решение:

Обозначим за x долю бедных в населении страны, а за y – их долю в доходе страны. Тогда коэффициент Джини равен

$$G = x - y = 0{,}5.$$

Пусть I – доход страны, а P – ее население. Тогда среднедушевой доход бедных равен $Y_1 = \frac{yI}{xP}$, а среднедушевой доход богатых – $Y_2 = \frac{(1-y)I}{(1-x)P}$. Отношение среднедушевых доходов равно

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{(1-y)I}{(1-x)P} : \frac{yI}{xP} = \frac{(1-y)}{(1-x)} * \frac{x}{y}.$$

Поскольку $x - y = 0{,}5$, $y = x - 0{,}5$. Подставляя, получаем

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{1 - x + 0{,}5}{1 - x} * \frac{x}{x - 0{,}5} = \frac{(3-2x)x}{(2x-1)(1-x)}.$$

Нам нужно найти минимальное значение этого выражения при $x \in (0{,}5;\ 1)$, $x > 0{,}5$, (так как $x = y + 0{,}5 > 0{,}5$). Дальше можно решать несколькими способами.

Способ 1.

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{(3-2x)x}{(2x-1)(1-x)} = \frac{-2x^2+3x}{-2x^2+3x-1} = \frac{-2x^2+3x-1+1}{-2x^2+3x-1} = 1 + \frac{1}{-2x^2+3x-1}.$$

Значение $\frac{Y_2}{Y_1}$ минимально, когда значение $-2x^2+3x-1$ максимально. Последнее выражение является квадратичной функцией, ветви параболы направлены вниз. Значит, это выражение максимально в вершине, $x^* = -\frac{3}{2(-2)} = 0{,}75$. Подставляя, получаем, что максимальное значение $-2x^2+3x-1$ равно $1/8$, и значит, минимальное значение $\frac{Y_2}{Y_1}$ равно

$$1 + \frac{1}{1/8} = 9.$$

Способ 2.

Минимальное значение $\frac{(3-2x)x}{(2x-1)(1-x)}$ – это минимальное значение параметра a, при котором уравнение

$$\frac{(3-2x)x}{(2x-1)(1-x)} = a$$

имеет решение. Преобразуя, получаем уравнение

$$2(a-1)x^2 - 3(a-1)x + a = 0.$$

Поскольку при $G > 0$ среднедушевой доход богатых больше среднедушевого дохода бедных, $a > 1$. Значит, коэффициент при x^2 не равен нулю, и это уравнение – квадратное. Оно имеет решение только тогда, когда дискриминант неотрицателен. Рассчитаем его:

[2] Страна названа в честь знаменитого исследователя неравенства Эммануэля Саэса, см., например, https://en.wikipedia.org/wiki/Emmanuel_Saez

$D = 9(a-1)^2 - 8a(a-1) = (a-1)(a-9) \geq 0.$

Таким образом, уравнение имеет решения при $a \leq 1$ и $a \geq 9$. Поскольку $a > 1$, подходит только $a \geq 9$; минимальное значение a равно 9. Подставляя, получаем, что $x = 0{,}75 \in (0{,}5; 1)$, и значит, отношение доходов, равное 9, действительно возможно. Следовательно, 9 и будет ответом.

Способ 3.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(3-2x)x}{(2x-1)(1-x)}$ на интервале $(1/2; 1)$. Рассчитаем $f'(x)$. После преобразований получаем, что

$$f'(x) = \frac{4x-3}{(2x-1)^2(1-x)^2}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим $x^* = 0{,}75 \in (0{,}5; 1)$. Поскольку производная меняет знак с минуса на плюс, это точка минимума.

Значит, минимальное значение $f(x)$ есть $f(0{,}75) = 9$.
Таким образом, доходы богатых и бедных отличаются минимум в 9 раз.

Критерии оценивания:
Критерий 1:
Представление формулы для коэффициента Джини или вывод коэффициента Джини в общем виде — 5 баллов.
Арифметическая ошибка при выводе формулы, не повлекшая серьезных изменений (Джини не верен, но правдоподобен) — потеря 1 балла.
Арифметическая ошибка, которая привела к концептуально неверному коэффициенту Джини (например, значение получилось отрицательным или больше 1) — потеря 3 баллов.
Кардинально неверный подход (например, если участник перепутал, что из чего вычитать — доход из доли или долю из дохода; или участник использовал неверную формулу вычисления площадей) — потеря 5 баллов.

Критерий 2: *Вывод формулы для отношения среднедушевых доходов, как функции одной переменной — 8 баллов.*
Не грубая арифметическая ошибка — потеря 1 балла.
Грубая арифметическая ошибка (потеря множителя, неверный знак и т.п.) —потеря 3 баллов.
Неверный процесс поиска формулы, но с верным направлением размышлений в начале решения — потеря 5 баллов.
В принципе неверный подход или отсутствие решения — потеря 8 баллов.

Критерий 3: *Поиск минимума функции* $f(x) = (3-2x)x\,/\,[(2x-1)(1-x)]$ *любым корректным способом — 12 баллов.*
Отсутствие проверки того, что достигнут именно минимум — потеря 1 балла.
Отсутствие проверки, что решение правдоподобно (доход богатых выше и т.п.), если это не очевидно — потеря 1 балла.
Негрубая арифметическая ошибка — потеря 1 балла.
Грубая арифметическая ошибка (потеря множителя, неверный знак и т.п.) с правдоподобным результатом — потеря 3 баллов.
Грубая арифметическая ошибка с неправдоподобным результатом — потеря 5 баллов.
Не доведение до конца исследования функции при верном подходе и довольно глубоком продвижении (участник не справился с полноценным анализом) — потеря 5 баллов.
Не доведение до конца исследования функции при верном подходе и незначительном продвижении (например, указано, что надо сделать и каким образом, но сами шаги не сделаны) — потеря 7 баллов.
В принципе неверный подход или отсутствие решения — потеря 12 баллов.