

МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ЭКОНОМИКЕ
г. Москва

10-й класс

ЗАДАЧИ

Дата написания	1 марта 2014 г.
Количество заданий	4
Сумма баллов	100
Время написания	150 минут

Решения

Задача № 1. «Болты и Гайки»**(25 баллов)**

Жители страны А умеют производить только болты и гайки. Они могут продавать изготовленную продукцию на мировом рынке только в комплектах 1 болт + 1 гайка, а на заработанные деньги могут покупать на мировом рынке еду, одежду и прочие нужные для жизни товары и услуги. Болты и гайки производятся из сырья, которое имеется в стране А в практически неограниченном количестве, с помощью 3D-принтеров, которых в стране есть 100 штук. Каждый 3D-принтер может за день произвести 1 болт или 2 гайки.

Производитель 3D-принтеров выпустил новую модификацию своего устройства, позволяющую производить за день 1 гайку или 2 болта. Согласно условиям программы утилизации, можно бесплатно обменять один принтер старой модификации на принтер новой модификации.

а) Сколько 3D-принтеров старой модификации нужно обменять на новые принтеры жителям страны А, чтобы произвести максимальное число комплектов?

б) Ответьте на вопрос предыдущего пункта, если производитель согласен выдать новый 3D-принтер только в обмен на два старых.

в) Ответьте на вопрос пункта а), если производитель согласен выдать два новых 3D-принтера в обмен на один старый.

Решение

Заметим, что старые принтеры обладают перед новыми сравнительным преимуществом в производстве гаек, а новые перед старыми — в производстве болтов. Следовательно, при выборе оптимальной комбинации нужно по возможности произвести все болты на новых принтерах, а гайки — на старых.

а) В этом случае мы можем выбрать любое количество старых (X) и новых (Y) принтеров при условии, что $X + Y = 100$. Если количество принтеров будет неравным, то какой-то из принтеров придется использовать «не по назначению». Но тогда обмен этих принтеров на новые (или отказ от обмена, если новых больше) позволит увеличить количество комплектов. Значит, нужно поменять 50 старых принтеров на новые и произвести 100 комплектов.

б) Совершая обмен двух старых принтеров на предложенных условиях, мы отказываемся от возможности производить 2 болта и 4 гайки и получаем возможность производить 2 болта и 1 гайку. Видно, что максимальное количество комплектов не увеличится в любом случае, и если совершить такой обмен с принтерами, задействованными ранее в производстве болтов, то не изменится.

Сколько принтеров использовалось для производства болтов до обмена? Если b — количество болтов, а g — количество гаек, то КПВ имела вид $2b + g = 200$, решая это вместе с условием $g = b$, получаем $g = b = 66\frac{2}{3}$. Поскольку принтеры являются дискретными, можно произвести 66 комплектов (использовав 66 принтеров для производства гаек и 33 принтера для производства болтов). Получаем, что при новых условиях можно обменять любое количество старых принтеров от 0 до 66 (количество комплектов при этом не изменится).

в) Совершая обмен двух старых принтеров на предложенных условиях, мы отказываемся от возможности производить 1 болта и 2 гайки и получаем возможность производить 4 болта и 2 гайки. Допустим, что мы поменяем все 100 принтеров. Тогда КПВ будет иметь вид $g + 2b = 400$. Подставляя $g = b$, получаем $g = b = 133\frac{1}{3}$ — максимально возможное количество комплектов, которое можно было бы произвести при бесконечной делимости принтеров. Однако принтеры являются дискретными, так что можно произвести не более 133 комплектов (задействовав 133 принтера в производстве гаек и 67 — в производстве болтов). Вместо использования 133 новых принтеров в производстве гаек, можно использовать любое количество старых принтеров от 0 до 66 и недостающее количество новых. В итоге, стране нужно поменять на новые от 34 до 100 принтеров.

Критерии

а) **(5 баллов)** 5 баллов ставится за полное объяснение «разделения труда» между принтерами в терминах сравнительных преимуществ, альтернативных издержек, приводящее к правильному выводу о необходимости поменять 50 принтеров.

Если просто описано, что будет при обмене 50 принтеров, без обоснования того, почему это именно максимальное количество комплектов, ставится 2 балла.

б) **(10 баллов)** 10 баллов ставится за полное решение.

5 баллов ставится, если в решении указан любой из наилучших вариантов с описанием (либо через неравенства, либо через графики, как меняется КПВ), как получить правильное максимальное число комплектов и почему нужно делать именно так.

2 балла ставится за любой из наилучших вариантов без объяснения, почему он наилучший, и правильно посчитанное максимальное количество комплектов.

Просто за ответ баллы не ставятся.

в) **(10 баллов)** Аналогично пункту б).

Задача № 2. «Евросок»**(25 баллов)**

На совершенно конкурентном рынке соков функция спроса имеет вид $Q_d = 50 - P$, а функция предложения имеет вид $Q_s = -10 + P$, где Q — выпуск в тысячах пакетов сока в месяц. Изначально рынок находится в ситуации совершенной конкуренции. Компания «Евросок» предлагает правительству передать ей лицензию, обеспечивающую монопольное право на производство соков, и гарантирует, что в таком случае монопольное положение поможет ей производить сок с издержками $TC = 8Q + F$, где F — стоимость лицензии. В случае отказа правительства «Евросок» не будет входить на рынок.

а) Предположим, что правительство при принятии своих решений учитывает только благосостояние потребителей сока, при этом потребители не получают ничего из того, что «Евросок» заплатит за лицензию. Согласится ли правительство на предложение «Евросока»?

б) Какую максимальную сумму готов заплатить «Евросок» за возможность войти на рынок?

Решение

а) Найдем равновесие конкурентного рынка: $P^* = 30$, $Q^* = 20$. При монополии же прибыль производителя равна $\pi = (50 - Q)Q - 8Q - F$. Это парабола с ветвями вниз, ее максимум достигается при $Q = 21$, при этом цена равна 29. Поскольку цена снижается, а количество растет, потребителям становится лучше, поэтому правительство согласится на вход фирмы.

б) Подставив $Q = 21$ в функцию прибыли, получим, что максимальная прибыль равна $441 - F$. Получаем, что максимальная стоимость лицензии равна 441.

Критерии**а) (15 баллов)**

5 баллов — нахождение конкурентного равновесия (для дальнейшего решения достаточно одного из компонентов — цены или объема выпуска).

5 баллов — нахождение монопольного равновесия (для дальнейшего решения достаточно одного из компонентов — цены или объема выпуска).

За каждую арифметическую ошибку снимается 1 балл.

Рассуждения об изменении положения потребителей ставится 5 баллов, которые участник не получит, если допустил арифметическую ошибку, повлиявшую на результат сравнения. Сравнение может быть сделано либо через идею об изменении цены или объема выпуска (как выше), либо через сравнение излишков потребителя.

б) (10 баллов)

Если расчеты отсутствуют, но при этом написано, что максимальное значение F должно быть равно значению прибыли, то ставится 1 балл. Если в этом же месте написано «максимальному значению прибыли», то ставится 2 балла.

За арифметические ошибки снимается по 1 баллу. Если решение этого пункта основано на неверных цифрах, полученных в результате арифметических ошибок в пункте а), то баллы дополнительно не снимаются.

Задача № 3. «Электроники-10»**(25 баллов)**

Фирма «Электроник- N » осуществляет производство и распределение электроэнергии в городе N . Если компания производит электроэнергию сама, то она несет издержки 2 млн руб. в месяц, а также 10 руб. за каждый произведенный кВт·ч электроэнергии. При этом «Электроник- N » может произвести не более 1 000 тыс. кВт·ч электроэнергии в месяц. Кроме того, фирма может купить любое количество электроэнергии по 15 руб. за кВт·ч у электростанции «Электроник- A », расположенной в городе A , и продать своим потребителям.

Администрация города N согласна купить у фирмы «Электроник- N » не более 800 тыс. кВт·ч в месяц по цене не более 12 руб. Частная производственная фирма может купить у фирмы не более 500 тыс. кВт·ч в месяц по цене не более 16 руб. Других клиентов у фирмы нет.

а) Если «Электроник- N » может назначить разные цены для разных потребителей, то сколько электроэнергии он будет производить и продавать? Какую прибыль он получит?

б) Рассмотрим фирму «Электроник- A ». Производство обходится ей в 7 руб. за кВт·ч (производственные мощности не ограничены, других издержек нет). Раньше она могла продавать электроэнергию только по единой фиксированной цене 15 руб. за кВт·ч, но недавно администрация сняла это ограничение, и теперь «Электроник- A » может назначить любую (единую) цену для всех своих покупателей. Сама администрация города A готова купить у фирмы не более 1 000 тыс. кВт·ч по цене не более 15 руб. за кВт·ч. Также спрос предъявляет фирма «Электроник- N », а других покупателей нет. Какую цену назначит фирма «Электроник- A » и какую максимальную прибыль получит?

Решение

а) Докажем сначала три вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. Нет смысла продавать энергию по ценам, отличным от 16 и 12. Действительно, если поставить цену из множества $P \in [0; 12) \cap (12; 16)$, то повышение цены не уменьшит спрос, то есть выручка увеличится без изменения издержек, а значит, увеличится прибыль.

Утверждение 2. Нет смысла продавать более 1000 тыс. единиц продукции. Допустим, мы продали больше 1000 тыс. единиц продукции. Это значит, что мы продаем товар обоим покупателям и используем оба источника при производстве (собственное производство и закупки). Тогда, если мы продадим администрации на одну тыс. единиц меньше, отказавшись от закупки этой тысячи у фирмы «Электроник- A », то наша прибыль увеличится на 3.

Утверждение 3. Нет смысла закупать электроэнергию у фирмы «Электроник- A ». Поскольку мы продаем не более 1000 тыс. единиц продукции, мы можем произвести их все самостоятельно, понеся издержки $TC(q) = 2000 + 10q$ тыс. руб. Если же мы будем закупать энергию в другом городе (сэкономив 2000 тыс. рублей, но заплатив больше за каждую единицу), то издержки составят $15q$ тыс. Нетрудно убедиться, что закупки извне оправданы только при $q \leq 400$, но это не может быть оптимальным объемом продаж, так как производственная фирма готова купить 500 единиц по цене 16, что превышает издержки в любом случае.

Поскольку готовность платить каждого покупателя не убывает по цене, нужно назначить каждому из них ту максимальную цену, которую он готов платить: производственной фирме $P_1 = 16$, а администрации $P_2 = 12$. При этом из доказанного выше следует, что мы должны произвести всю энергию сами и продать ее производственной фирме и администрации. Поскольку обе цены превышают предельные издержки, ясно, что нужно произвести так много энергии, как это возможно — 1000 тыс. единиц, и продать 500 из них по максимальной цене P_1 , а остальные — по цене P_2 . Прибыль, которую можно получить таким образом, равна 2000 тыс руб.

б) Рассмотрим оптимальное поведение фирмы «Электроник- N » в зависимости от цены P_A , по которой фирма «Электроник- A » будет продавать ей энергию.

Если $P_A < 12$, то фирма «Электроник- N » захочет купить «Электроник- A » все 1300 тыс. единиц, которые она может продать. Это следует, во-первых, из того, что 1300 тыс. единиц можно продать по цене не меньше 12 (значит, она захочет продать все), а кроме того, даже производство всех

возможных 1000 тыс. единиц на своих мощностях не окупит связанных с этим квазипостоянных издержек: $2000 + 10 \times 1000 > P_A \times 1000$.

Если $P_A = 12$, то фирме «Электроник- N » без разницы, закупать 1000 тыс. единиц или производить самостоятельно. При этом она может продать 500 тыс. единиц по цене 16 производственной фирме, а также любое количество энергии администрации города N . Таким образом, спрос фирмы «Электроник- N » на продукцию фирмы «Электроник- A » будет иметь следующий вид (в тысячах единиц):

$$Q = \begin{cases} 0, & \text{если } P_A > 12; \\ 1300, & \text{если } 0 \leq P_A \leq 12. \end{cases}$$

Прибавив к этому спрос, предъявляемый администрацией города A , получим

$$Q = \begin{cases} 0, & \text{если } P_A > 15; \\ 1000, & \text{если } 12 < P_A \leq 15; \\ 2300, & \text{если } 0 \leq P_A \leq 12. \end{cases}$$

Фирма A может либо назначить цену 15 и получить прибыль $(15 - 7) \times 1000 = 8000$ тыс. руб., либо назначить цену 12 и получить прибыль $(12 - 7) \times 2300 = 11500$ тыс. руб. Предпочтительнее второй вариант.

Критерии

Решения, приводимые участниками, могут отличаться от приведенного выше (например, вряд ли стоит ждать от них предварительного доказательства приведенных утверждений), но проверяющий должен определить, какие необходимые шаги выполнены в решении, а какие нет.

а) (10 баллов)

Если в ходе решения участника приведено и доказано то, что выше называется *Утверждение 1*, он получает 2 балла.

Если в ходе решения участника приведено и доказано то, что выше называется *Утверждение 2*, он получает 3 балла.

Если в ходе решения участника приведено и доказано то, что выше называется *Утверждение 3*, он получает 3 балла.

Верный ответ оценивается в 2 балла

б) (15 баллов)

Если правильно найдена пограничная точка спроса фирмы «Электроник- N » ($P_A = 12$), то ставится 2 балла.

Еще 13 баллов ставится за корректную функцию спроса на продукцию фирмы «Электроник- A » и выбор оптимальной цены. Из них:

- 7 баллов, если построен корректный спрос, включая точку $P_A = 15$.
- 6 баллов за сравнение вариантов цен, которые участник не получит, если допустил арифметическую ошибку, повлиявшую на результат сравнения.

За каждую арифметическую ошибку снимается 1 балл.

Задача № 4. «Тонкая настройка»**(25 баллов)**

Сеть салонов связи «Свяжи» продает 3G-модемы. Стоимость модема составляет 2000 у.е. Покупатель модема может прямо в салоне воспользоваться услугой по его настройке или настроить его самостоятельно. Настройка в салоне стоит 600 у.е.

Потребитель Поулсон обладает картой лояльности сети «Свяжи», которая дает ему скидку 20% на все товары (но не услуги) сети. Но, покупая модем со скидкой, Поулсон обязан настроить его в сети «Свяжи». Когда Поулсон приходит в салон, чтобы купить модем, он узнает, что является 100-м покупателем за день и ему полагается скидка 50% на услугу по настройке модема. Если Поулсон воспользуется картой лояльности, то данное предложение (100-й покупатель) действовать не будет.

Поулсон подумал: «А не проще ли вообще настроить модем самому?». Он спросил у консультанта: «Сколько может занять настройка модема?», — на что получил ответ: «Обычно от одного часа до восьми часов — зависит от вашей компьютерной смекалки». В какую сумму должен Поулсен ценить час своего времени, чтобы, независимо от своей компьютерной грамотности...

- а) он захотел воспользоваться скидкой для 100-го покупателя?
- б) он захотел воспользоваться картой лояльности?
- в) он решил настроить модем самостоятельно?

Решение

Посчитаем издержки на каждый вариант:

Скидка 100-го покупателя: $2000 + 600 \times (1 - 0,5) = 2300$.

Скидка по карте лояльности: $2000 \times (1 - 0,2) + 600 = 2200$.

Самостоятельная настройка: $2000 + tx$, где t — время на настройку, а x — оценка часа свободного времени.

а) Сравнивая стоимость первых двух вариантов, можно заключить, что скидка 100-го покупателя не будет использована *ни при какой* цене свободного времени.

б) Чтобы карта лояльности была выгоднее самостоятельной настройки, неравенство $2200 < 2000 + t \times x$ должно быть выполнено при любом $t \in [1; 8]$. При этом увеличение t лишь усиливает неравенство, поэтому достаточно решить его для $t = 1$. Получаем $x > 200$.

в) Чтобы самостоятельная настройка была выгоднее карты лояльности, неравенство $2200 > 2000 + t \times x$ должно быть выполнено при любом $t \in [1; 8]$. При этом уменьшение t лишь усиливает неравенство, поэтому достаточно решить его для $t = 8$. Получаем $x < 25$.

Критерии

Выделено три варианта — 2 балла.

Посчитана стоимость каждого варианта — по 2 балла, всего 6 баллов.

- а) 3 балла.
- б) 7 баллов.
- в) 7 баллов.