ПрОШ - 2021

Решения задач
Второй тур. Задачи. 10 класс
19 декабря 2021 г.

Задача 1. Олимпиада – это тоже праздник! (30 баллов)

Одна компания, которая производит олимпиады (x) и праздники (y), наняла на работу Петра. Директор компании не знает, что у Петра получается делать лучше: олимпиады или праздники. Он знает, что с вероятностью $p = 0{,}5$ Петр может за час произвести 0,5 единиц y, а с вероятностью $1 - p = 0{,}5$ – 1 единицу y. Также он знает, что с вероятностью $d = 0{,}5$ Петр может за час произвести 1 единицу x, а с вероятностью $1 - d = 0{,}5$ – 0,5 единиц x. Всего у Петра 8 часов. Директор компании выбирает, какое количество часов Петру потратить на производство x, а какое – на производство y, максимизируя количество комплектов из 1 x и m y, и прописывает эти часы в контракте. Петр тратит ровно это количество часов и отдаёт все x и y директору. При этом его реальные производственные функции: $y = \frac{L_y}{2}$, $x = L_x$. Определите, чему равно m, если известно, что директор получил на 0,4 комплекта из 1 единицы x и m единиц y меньше из-за того, что не знал производственные функции Петра до принятия решения о распределении часов между L_x и L_y.

Решение

Для начала немного формализуем условие:
при $p = 0{,}5$: $y = 0{,}5L_y$ и $x = L_x$;
при $1 - p = 0{,}5$: $y = L_y$ и $x = 0{,}5L_x$.
Тогда можем найти ожидаемые директором производственные функции Петра:

$$x_e = 0{,}5L_x + 0{,}5 \cdot 0{,}5L_x = 0{,}75L_x$$

$$y_e = 0{,}5L_y + 0{,}5 \cdot 0{,}5L_y = 0{,}75L_y$$

Далее выразим L_x и L_y и подставим в ограничение по количеству часов:

$$L_x = \frac{4}{3}x, \quad L_y = \frac{4}{3}y \Longrightarrow \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y = 8 \Longrightarrow x + y = 6$$

Вспомним, что олимпиады и праздники потребляются в пропорции 1 к m, значит $y = mx$. Получаем систему:

$$\begin{cases} x + y = 6; \\ y = mx. \end{cases}$$

Решив систему, получаем, что $x = \frac{6}{1+m}$, $\quad y = \frac{6m}{1+m}$, а значит директор пропишет в контракте следующие часы работы: $L_x = \frac{8}{1+m}$, $\quad L_y = \frac{8m}{1+m}$.

Работая столько часов, Петр фактически произведет $x = L_x = \frac{8}{1+m}$ и $y = 0{,}5L_y = \frac{4m}{1+m}$.

Теперь найдем, какое количество комплектов получает директор: чтобы было $\frac{8}{1+m}$ комплектов, нужно $x = \dfrac{8}{1+m}$ и $y = \dfrac{8m}{1+m}$, но Петр произвел лишь $y = \dfrac{4m}{1+m}$, поэтому всего у директора оказалось лишь $\dfrac{4}{1+m}$ комплектов.

Если производственные функции были известны директору с единичной вероятностью, то $L_x = x, \quad L_y = 2y$. Снова запишем ограничение на количество часов работы $x + 2y = 8$ и решим следующую систему: $\begin{cases} x + 2y = 8; \\ y = mx. \end{cases}$

Получим, что $x = \dfrac{8}{1+2m}$ и $y = \dfrac{8m}{1+2m}$, значит директор получает $\dfrac{8}{1+2m}$ комплектов.
Остается записать разницу в количестве комплектов и приравнять ее к 0,4.

$$\frac{8}{1+2m} - \frac{4}{1+m} = 0{,}4$$

$$2m^2 + 3m - 9 = 0$$

$$m = 1{,}5$$

Задача 2. Классика **(30 баллов)**

На совершенно-конкурентном рынке в краткосрочном периоде спрос представлен функцией $Q^d = 200 - 5P$, а предложение предъявляют 80 одинаковых фирм с издержками $TC_i = 2q_i^2 + 10q_i + 2021$, где q_i – выпуск отдельной фирмы.

а) (6 баллов) Найдите равновесную цену, объем продаж и прибыль каждой фирмы на рынке.

б) (14 баллов) Государство ввело налог на выручку производителей: каждая фирма обязана заплатить долю t от получаемой выручки в виде налога. Найдите ставку налога, при которой государство получает максимальные налоговые сборы.

в) (10 баллов) Найдите ставку налога, при которой суммарные излишки потребителей и производителей будут равны.

Решение

а) Выведем предложение. Поскольку рынок является совершенно конкурентным, приравняем P (цену) и MC (предельные издержки).

$$MC = 4q + 10 = P$$

$$q = \frac{P - 10}{4}$$

Получили предложение одной фирмы, тогда совокупное предложение на рынке составит:

$$Q_S = 80q = 20P - 200$$

Теперь найдем равновесие, приравняв спрос и предложение:

$$20P - 200 = 200 - 5P$$

$$P^* = 16,\ Q^* = 120,\ q^* = 1{,}5$$

Осталось найти прибыль одной фирмы.

$$\Pi = TR - TC = P^* \cdot q^* - 2(q^*)^2 - 10q^* - 2021 = 16 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot (1{,}5)^2 - 10 \cdot 1{,}5 - 2021 = -2016{,}5$$

б) Заметим, что налог на выручку полностью эквивалентен акцизу. Действительно, $TR_s = P_sQ = (1-t)TR_d = (1-t)P_dQ$, тогда $P_s = (1-t)P_d$ или $P_d - P_s = tP_d$.

Итак, мы поняли, что налог на выручку – это то же самое, что акциз. Далее, из эквивалентности налогов, максимальные налоговые сборы достигаются при единственных значениях P_d и P_s. Тогда найдем эти значения через потоварный налог.

Мы знаем, что оптимум потоварного налога: $t_p = \dfrac{P_{max} - P_{min}}{2} = \dfrac{40-10}{2} = 15$. Введем данный потоварный налог для нахождения P_d и P_s:

$$200 - 5(P_s + 15) = 20P_s - 200$$

$$325 = 25P_s$$

$$P_s = 13,\ P_d = 28$$

Теперь связка для акциза: $P_d - P_s = t_aP_d$ или $15 = 28t_a$, тогда $t_a = 15/28 = \dfrac{15}{28}$.

в) Будем действовать аналогично. Будем вводить потоварный налог, а из него восстанавливать величину акциза, которая равна налогу на выручку. Пусть t – потоварный налог.

$$200 - 5P_d = 20(P_d - t) - 200$$

$$P_d = 16 + 0.8t \quad P_s = 16 - 0.2t$$

Тогда посчитаем зависимость излишков от величины t:

$$CS = 1.6(30-t)^2$$

$$PS = 0.4(30-t)^2$$

Заметим, что ставка потоварного налога, при котором достигается равенство не меньше 30. Тогда

$$P_d - P_s = 30 = 40t_a$$

$$t_a = 0.75$$

Тогда ответ: $t_a \geqslant 0.75$

Задача 3. Вполне прозрачная экономика (30 баллов)

Рассмотрим экономику, которая состоит из двух секторов – промышленное производство и сельское хозяйство. Также для простоты предположим, что промышленность находится в городе, а сельское хозяйство – в сельской местности. В сельской местности живет 45 млн. человек, а в городе – 15 млн. человек. На рынке промышленной продукции действует 10 фирм, произодственная функция каждой из которых $Y = 25L_y - 2.5L_y^2$, где Y - количество производимого товара в промышленном секторе в день в млн. штук, а L_y – количество работающих людей в млн. человек. Продукцию сельского хозяйства также производят 10 фирм, производственная функция каждой из которых $X = 70L_x - 5L_x^2$, где X - количество собранного зерна в день в млн. кг, а L_x – количество работающих людей в млн. человек. Цена одного товара промышленного сектора равна 4 рублям, а цена одного килограмма зерна равна 1 рублю.

Каждый человек в стране понимает, что лучше работать, чем не работать, поэтому каждый житель города и сельской местности готов работать за любую положительную зарплату. Рынки труда и конечной продукции обоих секторов совершенно-конкурентны.

а) Какие зарплаты установятся в двух секторах в равновесии в отсутствии мобильности труда между городом и сельской местностью?

б) С 1 января государство решило упростить процедуру миграции, поэтому теперь люди могут свободно перемещаться между городом и сельской местностью. Какие зарплаты установятся в двух секторах в равновесии в этом случае?

в) Как изменится ответ на вопрос пункта б), если для каждого человека миграция связана с издержками в 15 рублей в день на аренду кровати в общежитии. Какие установятся зарплаты в городе и в сельской местности в равновесии теперь?

Решение

а) Поехали. Для начала запишем обратный спрос на труд в промышленности

$$MRP_{L_y} = P_y \cdot MP_{L_x} = 100 - 20L_y = w_y$$

$$L_y = \frac{100 - w_y}{20} \Longrightarrow L_y^d = 50 - \frac{w_y}{2} \Longrightarrow w_y = 100 - 2L_y^d$$

Мы знаем, что там точно будет работать 15 млн. человек (вертикальное предложение). Значит зарплата будет равна $100 - 2 \cdot 15 = 70$.

Спрос на труд в сельском хозяйстве

$$MRP_{L_x} = P_x \cdot MP_{L_x} = 70 - 10L_x = w_x$$

$$L_x = \frac{70 - w_x}{10} \Longrightarrow L_x^d = 70 - w_x \Longrightarrow w_x = 70 - L_x^d$$

Мы знаем, что там точно будет работать 45 млн. человек (вертикальное предложение). Значит зарплата будет равна $70 - 45 = 25$.

Ответ: зарплата в промышленности будет равна 70 руб., в сельском хозяйстве – 25 руб.

б) В этом случае зарплаты в двух секторах должны быть равны, иначе начнется миграция.

$$w_x = w_y$$

$$100 - 2L_y = 70 - L_x$$

$$L_x = 2L_y - 30$$

$$L_x + L_y = 60$$

$$3L_y - 30 = 60$$

$$L_y = 30 \Longrightarrow w_x = w_y = 100 - 2 \cdot 30 = 40.$$

Ответ: зарплата равна 40 руб. в обоих секторах.

в) Миграция происходит из сельской местности в город. Следовательно, платить за кровать будут в городе, поэтому зарплата в городе должна быть на 15 единиц больше, чтобы работнику было без разницы, где работать. Если это не так, то это не равновесие и начинается миграция.

$$w_y - 15 = w_x$$

$$85 - 2L_y = 70 - L_x$$

$$L_x = 2L_y - 15$$

$$L_x + L_y = 60$$

$$3L_y - 15 = 60$$

$$L_y = 25 \Longrightarrow w_y = 100 - 2 * 25 = 50$$

$$w_x = 35.$$

Ответ: зарплата равна 50 руб. в городе и 35 руб. в сельской местности.

Задача 4. Олимпийка или олимпос? (30 баллов)

Фирма «Вершина» производит олимпийские куртки и имеет возможность осуществлять ценовую дискриминацию, продавая их по разным ценам на внутреннем и внешнем рынках. На внутреннем рынке фирма «Вершина» является монополистом и функция спроса на куртки имеет вид $Q^d = 200 - P$, на внешнем рынке фирма может продать любое количество курток по цене $P_w = 160$. Функция издержек фирмы «Вершина» на производство курток имеет вид $TC = Q^2$.

а) (5 баллов) Определите количество курток, которое продаст фирма «Вершина» на внутреннем и внешнем рынках.

б) Государство решило ввести потоварный налог на продажу олимпийских курток. Определите максимально возможные налоговые сборы государства, если налог введён

1. (5 баллов) На каждую куртку, проданную на внутреннем рынке;
2. (5 баллов) На каждую куртку, проданную на внешнем рынке;
3. (5 баллов) На каждую проданную куртку, вне зависимости от того, на каком рынке она продана.

в) (10 баллов) Какие налоговые сборы в пункте б) получились больше: суммарные налоговые сборы в пунктах 1 и 2 или налоговые сборы в пункте 3? Дайте экономическую интерпретацию полученного результата.

Решение

Приведем решение «в лоб» – через максимизацию прибыли. Также в данной задаче было возможно графическое решение через построение графика суммарного предложения для двух рынков.

а) Запишем функцию прибыли фирмы «Вершина» и промаксимизируем ее:
$\Pi = Q_d(200 - Q_d) + 160Q_w - (Q_d + Q_w)^2 \longrightarrow \max\limits_{Q_d, Q_w \geqslant 0}$

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_d} = 200 - 2Q_d - 2Q_d - 2Q_w = 200 - 4Q_d - 2Q_w = 0 \\ \Pi'_{Q_w} = 160 - 2Q_d - 2Q_w = 0 \end{cases}$$

$Q_d = 20, \ Q_w = 60$

б) Аналогично пункту а) решим пункт б).

1. $\Pi = Q_d(200 - t - Q_d) + 160Q_w - (Q_d + Q_w)^2 \longrightarrow \max\limits_{Q_d, Q_w \geqslant 0}$

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_d} = 200 - t - 2Q_d - 2Q_d - 2Q_w = 200 - t - 4Q_d - 2Q_w = 0 \\ \Pi'_{Q_w} = 160 - 2Q_d - 2Q_w = 0 \end{cases}$$

$Q_w = 80 - Q_d, \quad Q_d = \dfrac{40 - t}{2}$
Запишем и промаксимизируем налоговые сборы:
$T = 20t - 0{,}5t^2 \longrightarrow \max\limits_{t \geqslant 0}$
Это парабола ветвями вниз, поэтому максимум функции – в вершине: $t = 20 \Longrightarrow T_{max} = 400 - 200 = 200$

2. $\Pi = Q_d(200 - Q_d) + (160 - t)Q_w - (Q_d + Q_w)^2 \longrightarrow \max\limits_{Q_d, Q_w \geqslant 0}$

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_d} = 200 - 2Q_d - 2Q_d - 2Q_w = 200 - 4Q_d - 2Q_w = 0 \\ \Pi'_{Q_w} = 160 - t - 2Q_d - 2Q_w = 0 \end{cases}$$

$Q_d = 50 - 0{,}5Q_w, \quad Q_w = 60 - t$
Максимизируем налоговые сборы:
$T = 60t - t^2 \longrightarrow \max\limits_{t \geqslant 0}$
Это парабола ветвями вниз, поэтому максимум функции – в вершине: $t = 30 \Longrightarrow T_{max} = 1800 - 900 = 900$

3. $\Pi = Q_d(200 - t - Q_d) + (160 - t)Q_w - (Q_d + Q_w)^2 \longrightarrow \max\limits_{Q_d, Q_w \geqslant 0}$

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_d} = 200 - t - 2Q_d - 2Q_d - 2Q_w = 200 - 4Q_d - 2Q_w = 0 \\ \Pi'_{Q_w} = 160 - t - 2Q_d - 2Q_w = 0 \end{cases}$$

$Q_d = 20, \quad Q_w = \dfrac{120 - t}{2}$
Максимизируем налоговые сборы:
$T = 20t + 60t - 0{,}5t^2 \longrightarrow \max\limits_{t \geqslant 0}$
Это парабола ветвяими вниз, поэтому максимум функции – в вершине: $t = 80 \Longrightarrow T_{max} = 1600 + 4800 - 3200 = 3200$

в) В пунктах а) и б) суммарные налоговые сборы составили 1100, в пункте в) же – 3200. При введении налога на одном рынке у фирмы-монополиста есть возможность переключиться на другой рынок, поэтому государство не может получать максимально возможные налоговые сборы, как если бы, например, у фирмы просто не было доступа ко второму рынку в принципе. Когда налог вводится сразу на двух рынках, где фирма осуществляет свою деятельность, у фирмы нет той свободы в перераспределении продаж между рынками, поэтому налоговые сборы получаются выше.