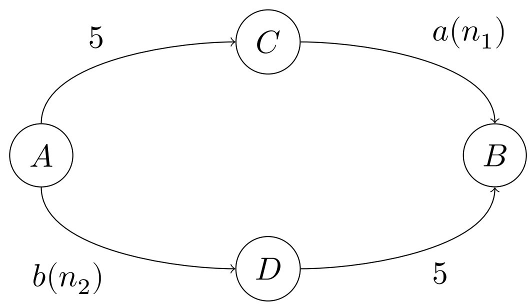
**Теория игр–$\gamma$**
**Листок 3.** Пробки всех сортов
**Преподаватели:** Рита Голуб
**Составитель:** Яна Коротова
**Дедлайн:** 12 августа 2023 года, 21:00 МСК
Задачи в этом листке можно сдавать **в любом порядке**.

## Задача 1

Из города $A$ в город $B$ можно добраться через город $C$ или через город $D$. Всем жителям из города $A$ нужно добраться до города $B$. Считайте, что жители из других городов дороги не занимают. Путь из $A$ в $C$ занимает 5 часов, из $C$ в $B$ — $a(n_1)$ часов, из $A$ в $D$ — $b(n_2)$ часов, из $D$ в $B$ — 5 часов, где $n_1$, $n_2$ — число жителей, которые едут по дороге из $C$ в $B$ и из $A$ в $D$, соответственно. В городе $A$ живет 400 человек.




**а)** Пусть $a(x) = \frac{n_1}{100}$, $b(x) = \frac{n_2}{150}$. Найдите равновесные $n_1$, $n_2$ и время в пути каждого жителя.

**б)** Пусть $a(x) = \frac{n_1}{100}$, $b(x) = 5 - \frac{n_2}{150}$. Найдите равновесные $n_1$, $n_2$ и время в пути каждого жителя.

**в)** *(дополнительный пункт — вне зачета)* Пусть $a(x) = \frac{n_1}{100}$, $b(x) = \frac{n_2^2}{100^2} + 2$. Найдите равновесные $n_1$, $n_2$ и время в пути каждого жителя.

**г)** Для каждого пункта приведите обоснование, почему время в пути может иметь такую зависимость от загруженности дороги.

## Задача 2

Продолжим рассматривать город из предыдущей задачи.

**а)** Пусть $a(x) = \frac{n_1}{100}$, $b(x) = \frac{(200 - n_2)^2}{100^2} + 2$. Найдите равновесные $n_1$, $n_2$ и время в пути каждого жителя.

**б)** Пусть

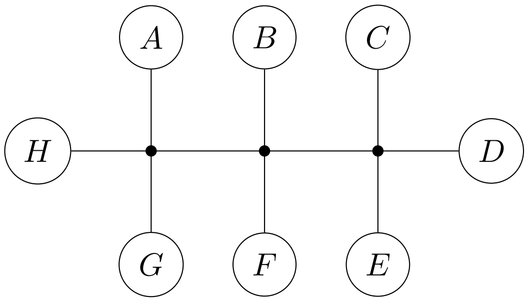
$$a(x) = \frac{n_1}{100}, \quad b(x) = \begin{cases} \frac{(100 - n_2)^3}{100^2} + 3, & n_2 \in [0; 120] \\ 1 + 0.01 n_2, & n_2 > 120 \end{cases}.$$

Найдите равновесные $n_1$, $n_2$ и время в пути каждого жителя.

**в)** Для каждого пункта изобразите решение *графически*.

## Задача 3

В городе, представленном ниже, $A$-$H$ — районы. В одном районе живет $k$ жителей, которым нужно доехать до другого района. Ездить можно только по дорогам, изображенных как линии, соединяющие районы. Жители из одного района равномерно распределяются между остальными. Так, из района $A$ в район $B$ едет $k/7$ человек. Время в пути равно $n$, где $n$ — число людей, которые едут по дороге.




**а)** Пусть населен только район $H$. Сколько времени пройдет, пока все жители доедут до желаемой точки? Сколько в среднем один житель затратит на путь? Зависят ли найденные значения от точки отправления (района)?

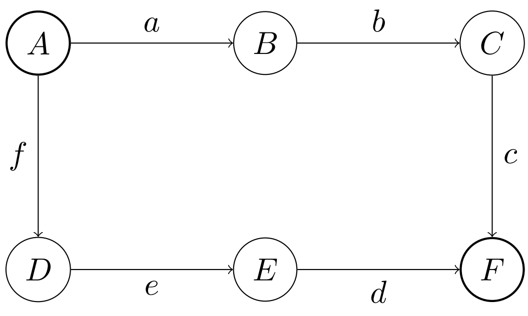
**б)** Пусть помимо района $H$ населен также район $A$. Сколько времени пройдет, пока все жители доедут до желаемой точки? Есть возможность поставить светофор. Он может находиться только на узле (выделенные точки, соединяющие ребра.) Светофор горит ровно столько времени, сколько нужно, чтобы полностью освободилась дорога, по которой двигаются машины от светофора. Светофор не может разделять поток из одного города, то есть все жители из $A$, например, должны или стоять на светофоре, или ехать. Стоит ли ставить светофор и если да, то где его установить, чтобы минимизировать время в пути каждой машины?

**в)** Пусть помимо районов $H$ и $A$ населен также район $G$. Сколько времени пройдет, пока все жители доедут до желаемой точки? Где стоит поставить светофор в этом случае?

## Задача 4

В районе $A$ живет $n$ человек, которые хотят приехать в район $F$. По одной дороге можно проехать только один раз. Время в пути (в минутах) при поездке по каждой из дорог в зависимости от доли жителей $x$, которые по этой дороге едут, равно:

$$a = 1; \quad b = 0.5x; \quad c = x$$
$$d = x^2; \quad e = x; \quad f = 1.$$



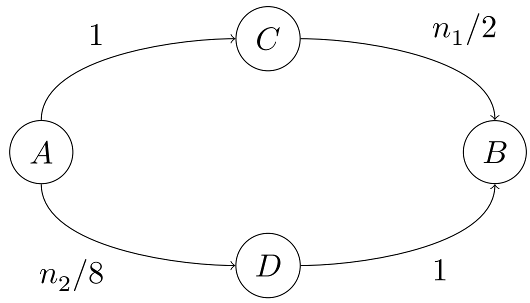

В других районах никто не живет.

**а)** Определите, как жители района $A$ могут доехать до района $F$. Чему равны равновесные доли жителей, которые поедут по каждому возможному маршруту? Сколько минут жители проведут в пути?

**б)** Мэр города проложил ветку метро из района $B$ в район $E$. Время в пути (в минутах) при поездке на метро независимо от доли жителей $x$, которые пользуются метро, равно $g = 0$. Чему равны равновесные доли жителей, которые поедут по каждому возможному маршруту? Какая доля жителей воспользуется новой дорогой? Сколько минут жители проведут в пути? Позволило ли строительство новой дороги сократить время в пути?

[1]Считайте, что при выходе из метро жители продолжают путь на машине.

## Задача 5




Из города $A$ в город $B$ едет 4 фуры, наполненные товарами, для продажи этих товаров в городе $B$. Каждая одновременно и независимо принимает решение о том, по какой дороге ехать. На диаграмме справа изображены возможные маршруты и города $C$ и $D$, через которые проложены трассы. В каждом из этих городов можно продавать товар, который везут фуры. Спрос в городе $C$ равен $p^d_C(q_C) = 4 - q_C$, спрос в городе $D$ равен $p^d_D(q_D) = 3 - q_D$.

Прибыль фуры $k$ имеет вид:

$$\pi_k = p^d_i(q_i)q_i + p^d_B(q_B)q_B - TC_k(q_k)(1 + t_k),$$

где $i \in \{C, D\}$ — индекс, указывающий на город, $q_i$ — количество товара, продающееся в городе $i$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ — номер фуры. Внутри городов $B,\ C,\ D$ фирмы конкурируют по Курно. Спрос в городе $B$ равен $p^d_B(q_B) = 3 - q_B$. Все фуры одинаковые — функция издержек каждой равна $TC_k(q_k) = 0.25q_k$. Фуры сначала принимают решение о том, по какой дороге ехать, а затем сколько продать в каждом городе, причем так, чтобы прибыль была максимальна. Считайте, что количество товаров, которое одна фура продает в каждом городе, одинаково. Число фур не может быть нецелым.

**а)** Найдите, сколько фур в равновесии поедет по каждому маршруту, сколько товаров они будут продавать в каждом из городов и время в пути, которое каждая фура проведет в пути.

**б)** Если бы фуры минимизировали время в пути (и выбирали дорогу), сколько времени каждая провела бы в пути и по какой дороге ехала бы?