

**Математика**

**Листок 1.** Многомерная оптимизация с ограничениями и выпуклость, неравенства о средних

**Преподаватели:** Карпов Игорь

**Составитель:** Карпов Игорь

**Дедлайн:** 6 августа 2023 года, 21:00 МСК

Задачи в этом листке можно сдавать **в любом порядке**.

**Задача 1**

Найдите максимум/минимум этих функций, используя неравенства о средних:

- $\Pi = (P - c)Q$  если  $Q = a - bP$
- $TC = wL + rK$  если  $Q = \sqrt[3]{KL^2}$
- $Q = \sqrt{L_1} + 2\sqrt{L_2}$  если  $L_1 + L_2 = L$

**Задача 2**

В стране ШЭЛ живет Шелдон, который зарабатывает продажей двух товаров: Ски ( $X$ ) и Керги ( $Y$ ). У Шелдона имеется час времени и две альтернативы: производить Ски и Керги в комплектах по 1 единице каждого, тогда он производит по одному комплекту в минуту (на производство у Хелча есть 80 минут). Или же он может производить задачи отдельно, тогда его КПВ будет иметь вид  $0.5x + 0.8y = 80$ . При этом он не несет никаких издержек от производства Ски и Керги. Леонард является монополистом на рынке обоих товаров:  $P_x = 166 - Q_x$ ;  $P_y = 170 - Q_y$ .

- Постройте суммарную КПВ Шелдона и найдите его максимальную прибыль.
- Политик №1 из государственной думы страны ШЭЛ в целях пополнения бюджета предложил ввести потоварный налог 12 на рынке товара Керги. Найдите налоговый сбор и установившиеся количества на рынках в результате такой меры.
- Политик №2 заметил, что от аналогичного налога на рынке товара Кси налоговый сбор будет выше. Найдите налоговый сбор и установившиеся количества на рынках в результате такой меры.
- Политик №3 предложил не спорить о таких мелочах и просто ввести налог сразу на обоих рынках! Найдите налоговый сбор и установившиеся количества на рынках в результате такой меры. (У вас получилось больше суммы ответов в двух предыдущих пунктах, не так ли?)

**Задача 3**

Найдите оптимальный набор выпусков, такой, что максимальна суммарная прибыль 15-ти фирм, которые продают свою продукцию по ценам  $1, \dots, 15$  и каждая имеет издержки на производство  $TC = 0.25Q^2$ . При этом суммарный выпуск фирм не может быть больше 90 (ВСОШ-2019)

**Задача 4**

Монополист владеет двумя заводами. Первый завод может производить товары  $X$  и  $Y$ , и функция издержек на нем имеет вид  $TC_1 = (X + Y_1)^2$ . Второй завод может производить товары  $Y$  и  $Z$ , и функция издержек на нем имеет вид  $TC_2 = (Y_2 + Z)^2$ .  $Y_1, Y_2$  - просто количество товара  $Y$  произведенное на каждом заводе. Спросы на товары выглядят следующим образом:  $X_d = 120 - P_x$ ,  $Y_d = 180 - P_y$ ,  $Z_d = 60 - P_z$ . Определите, какие  $P_x$ ,  $P_y$  и  $P_z$  установит монополист. (Рэм Бахарев)

**Задача 5**

В стране Ratляндия Олег промышленяет двумя товарами: крысиными историями ( $x$ ) и мемарсами, являясь единственным производителем этих товаров. Мемарсы можно продавать в двух регионах, Ratsity (там они в простонародии называются  $y$ ) и Rattown (там они носят название  $z$ )

не обязательно по одинаковой цене. Спрос на мемарсы в Ratscity задается функцией  $y = 60 - P_y$ , а в Rattown:  $z = 45 - \frac{P_z}{2}$ . В этих двух регионах разное отношение к мемарсам, так что и цена может быть разной. За Олегом пристально следит ее давний враг: Полина. Она выяснила, что Крысиные истории же Олег продает только за рубеж, где про спрос на  $x$  известно лишь то, что его MR не возрастает ни при каких значениях количества. Проведя производственную вылазку, Полина выяснила, что издержки Олега задаются функцией  $TC = x^2 + 41a + a^2$  где  $a$  – общий объем производства мемарсов ( $a = z + y$ ). Кроме того, в каждом периоде Олег ограничен производственным бюджетом: он не может потратить на производство более 442 д.е., и исходя из этого принимает решение о выпуске. Последним, что смогла подметить Полина до того, как ее поймали, было то, что в оптимуме предельная выручка от продажи крысиных историй в 2 раза больше предельных издержек на их производство. Помогите Полине разгадать годами мучавшую ее загадку: сколько в итоге Крысиных историй производит Олег?