

**Теория игр–β****Листок 1.** Одновременные игры**Преподаватели:** Рэм Бахарев**Составитель:** Паша Шишлянников**Дедлайн:** 9 августа 2023 года, 21:00 МСКЗадачи в этом листке можно сдавать **в любом порядке.**

Во всех задачах необходимо искать равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Задача 1. Тренировка

Ассистенты Антон и Савва должны подойти в штаб пораньше, чтобы разложить подборки задач в холле второго этажа. Каждый из них хочет поспать и подойти позже. При этом они очень не хотят, чтобы их поругали за невыполненную работу. Это взаимодействие можно представить в виде следующей игры:

	Подойти пораньше	Поспать
Подойти пораньше	-1;-1	1;4
Поспать	4;1	-4;-4

- Как выгодно поступить одному из ребят, если второй решил подойти пораньше?
- Найдите равновесие Нэша в этой игре.
- Изменится ли ваш ответ на предыдущий пункт, если в случае, когда они придут пораньше вместе, то каждый из них получит одну звездочку, ценность которой для каждого из них равна 3 единицам? В остальных случаях ничего не изменится.

Задача 2. Камень, ..., бумага

Владислав и Даниил играют во всем известную игру: камень–ножницы–бумага. Правила просты: участники одновременно и единоразово выбрасывают с помощью своих рук одну из трех возможных комбинаций пальцев: камень, ножницы или бумага. Победитель (напоминаем, что камень бьет ножницы, ножницы бьют бумагу, бумага бьет камень) дает проигравшему щелбан. Победитель получает одно очко, а проигравший — теряет одно. В случае ничьей никто никого не ударяет, никто не получает очков.

- Найдите равновесие Нэша.
- Рассмотрим некоторое упрощение описанной выше игры. Теперь Владислав и Даниил надевают по варежке: теперь они могут выбросить только камень или бумагу. Найдите новое равновесие Нэша.

Задача 3. Производство зернышек

На просторах Костромской губернии в 20X3 родилось очень много хомячков. И все они очень любят употреблять в пищу пшеничные зернышки. Их спрос на пшеничные колоски представим в виде функции $Q^d = 245 - p$, где p — цена колоска пшеницы, Q — количество колосков, приобретенных хомячками. Грызуны живут неподалеку от пшеничного поля, на котором n канареек выращивают колоски пшеницы. Местные канарейки одновременно выбирают количество колосков, которое каждая из них хочет вырастить. Каждый выращенный колосок обходится канарейке в пять монет (для каждой канарейки издержки производства колосков одинаковы, других издержек они не несут).

- Допустим, на поле колоски выращивают всего две канарейки ($n = 2$). Определите, сколько монет заработает от продажи колосков каждая из двух канареек.
- (дополнительный пункт - вне зачета) А что, если канареек в действительности $n > 2$. Для каждого возможного n определите, сколько колосков приобретут хомячки у каждой из канареек.

Задача 4. Мыльные пузыри

В уездном городе N. жители на праздниках очень любят смотреть на мыльные пузыри. В связи с этим городская администрация ежегодного предъявляет спрос на мыльные пузыри, который описывается функцией $p^d = 20 - Q$, где p – цена мыльных пузырей (в монетах), а Q – их количество.

В уездном городе N. существует всего два производителя мыльных пузырей – Андрей и Илья, причем они используют разные технологии. Илье каждый новый мыльный пузырь обходится в 10 монет, фиксированных издержек он не несет. Андрей же тратит 0 монет, в случае, если он ничего не производит, и 9 монет на каждый новый пузырь, если производит. В ситуации, когда Андрею безразлично, производить или не производить мыльные пузыри, он предпочтет ненулевой выпуск. Более того, если Андрей решает, что он будет производить мыльные пузыри, он должен заплатить администрации города N. 16 золотых монет за лицензию на мыльное дело (Илье лицензия досталась бесплатно благодаря связям в мэрии).

Определите, сколько мыльных пузырей выпустят Андрей и Илья на очередном празднике в уездном городе N., если они принимают решения об оптимальном выпуске пузырей одновременно?

Задача 5

Две сестры, Алина и Белла, готовятся к экзамену, который начнется через 12 часов. Это время девушки распределяют между написанием конспектов онлайн-лекций и заучиванием материала. Оценки девушек (максимально за экзамен можно получить 150 баллов) определяются следующим образом: $g_a = (x_a + x_b)y_a$ и $g_b = (x_a + x_b)y_b$, где g_a, g_b – оценки девушек, x_a, x_b – время, что Алина и Белла тратят на написание конспектов, соответственно, и y_a, y_b – время, что каждая из девушек тратит на заучивание материала. Каждая девушка хочет максимизировать оценку, которую она получит на экзамене.

- а) Найдите равновесие Нэша.
- б) Будет ли распределение времени, полученное вами в предыдущем пункте, эффективным?