

# Функции и Графики

5 августа 2023



# Функция

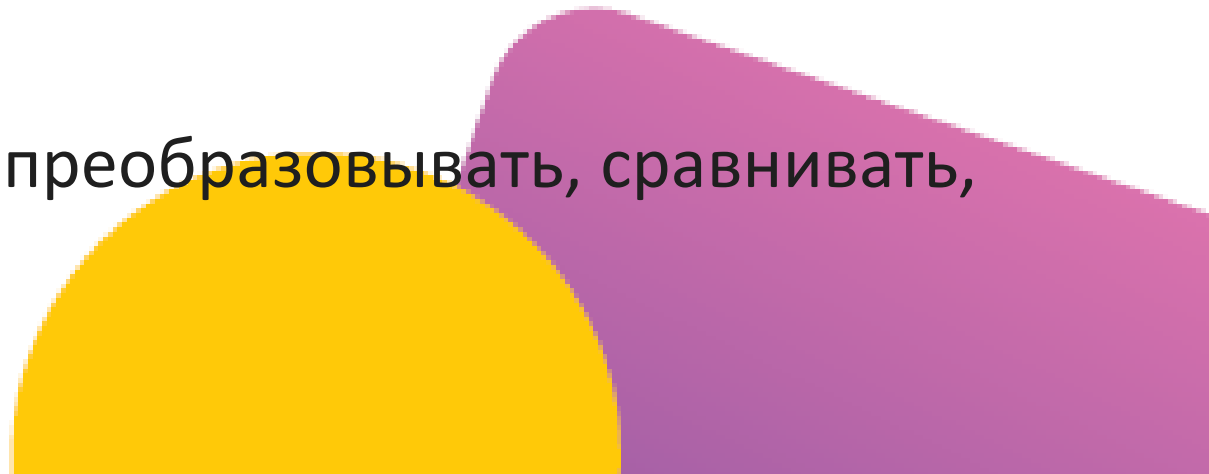
- Функция (уравнение функции) помогает выразить **математическую зависимость** между двумя (или более) величинами:

$$y = f(x), \text{ где}$$

$x$  – аргумент

$y$  – значение функции

- Эти зависимости можно рисовать, преобразовывать, сравнивать, складывать и т.д.





## Пример

- Издержки (ТС) фирмы зависят от объема выпуска (Q):

$$TC = 10Q + 300$$

*Что в данном случае является аргументом функции?*

- Выручка (TR) фирмы:

$$TR = 60Q - 2Q^2$$

- Прибыль (П) фирмы:

$$П = TR - TC = (60Q - 2Q^2) - (10Q + 300) = -2Q^2 + 50Q - 300$$

*В чем различие между линейной и квадратичной функциями?*

# Обратная функция

- Многие функции можно однозначно записать в **обратном виде**, т.е. зависимость  $y = f(x)$  преобразовать к виду  $x = g(y)$
- Такое преобразование **однозначно** для **линейной функции**



*Найдем обратные функции:*

$$y = 10 + 2x$$

$$Q = 60 - 3P$$

## Функция в неявном виде

- Иногда  $x$  и  $y$  связаны между собой, но эта связь записывается в т.н. **неявном виде**

$$F(x, y) = 0 \text{ или чаще } F(x, y) = \text{const}$$




$$2x + 4y = 100$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

*Найдем явный вид функций. Будет ли преобразование однозначным?*

# Область определения функции

- **Область определения** функции  $f(x)$  - это множество всех допустимых значений переменной  $x$  для функции  $f(x)$
  - Функция может быть определена только для тех значений, при которых выражение  $f(x)$  **имеет смысл**
  - **Область значений** функции  $f(x)$  - это множество значений, которые **может принимать** функция  $f(x)$
  - **Область допустимых значений (ОДЗ)** - это множество значений, которые **имеют смысл**
- 



## Пример

- Если  $Q$  – это количество товара, а  $P$  – цена товара, то с точки зрения экономики важно учитывать, что

$$Q \geq 0, P \geq 0$$

*Найдем область определения и область допустимых значений (ОДЗ) для функции*

$$Q = 60 - 3P$$

# График функции и его смещение

- График функции позволяет **визуализировать зависимость**, для решения экономических задач это бывает очень важно
- В общем случае для функции  $y=f(x)$  действуют следующие **правила геометрического преобразования графиков**:

$$y=f(x) \text{ +- } c$$

смещение вверх/вниз

$$y=f(x \text{ +- } m)$$

смещение влево/вправо





## Линейная функция: общий вид

- В общем виде  $y = kx + b$
- Буквы могут быть и другими:  $y = bx + c$

*Какие значения могут принимать коэффициенты  $k$ ,  $b$ ,  $c$ ?*



Функции спроса и предложения в экономике:

$$Q_d = a - bP$$

$$Q_s = c + dP$$

$$y = kx + b$$

## влияние коэффициентов $k, b$

- $k$  – угловой коэффициент, определяет наклон к оси  $Ox$ 
  - $k > 0$       **возрастающая**
  - $k < 0$       **убывающая**
- $b$  – свободный коэффициент, определяет сдвиг по вертикали, относительно оси  $Ox$ 
  - $b > 0$       **сдвиг вверх**
  - $b < 0$       **сдвиг вниз**





## Пример

- *Посмотрим преобразования* графика функции  $y = x$
- *Докажем для функции вида*  $y = kx + b$ , *что*  
угловой коэффициент  $k = \Delta y / \Delta x$



$$y = kx + b$$

точки пересечения с осями координат

при  $y=0$  получим  $x = -b/k$       пересечение с осью  $OX$

при  $x=0$  получим  $y = b$       пересечение с осью  $OY$



*Построим графики функций спроса  $Q_d(P)$  и предложения  $Q_s(P)$*

**Внимание!**  $Q$  – по горизонтальной оси,  $P$  – по вертикальной оси

$$Q_d = 100 - 2P, \quad Q_d = 60 - 2P$$

$$Q_s = 20 + 2P, \quad Q_s = -10 + 4P$$

## Квадратичная функция: общий вид

- В общем виде **парабола**  $y = ax^2 + bx + c$

*Какие значения могут принимать коэффициенты **a**, **b**, **c**?*



Функция прибыли фирмы:

$$\Pi = -2Q^2 + 50Q - 300$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

## влияние коэффициентов $a, c$

- $a$  – старший коэффициент, определяет направление ветвей

$a > 0$       ветви вверх

$a < 0$       ветви вниз

- $c$  – свободный коэффициент, определяет сдвиг по вертикали,

$c > 0$       смещение вверх

$c < 0$       смещение вниз



Посмотрим преобразования  $y = x^2$



$$y = ax^2 + bx + c$$

влияние коэффициента  $b$

- $b$  – второй коэффициент, определяет сдвиг по горизонтали



Построим графики с помощью преобразования  $y = x^2$

$$y = (x - 5)^2$$

$$y = (x + 5)^2$$

$$y = x^2 - 5x$$

$y=f(x) \pm c$     смещение вверх/вниз

$y=f(x \pm t)$     смещение влево/вправо

$$y = ax^2 + bx + c$$

пересечение с осью  $Ox$

*Сколько случаев нужно рассмотреть?*





# $y = ax^2 + bx + c$ вершина параболы

- Стандартная формула:  $x_0 = -b/2a$
- **Важно!** парабола – **фигура симметричная**



*\*Докажите  $x_0 = -b/2a$  при помощи выделения полного квадрата для функции  $y = ax^2 + bx + c$*





Спасибо за внимание !

**Листок №1: Функции**

**Дедлайн: 06.08**

